



POLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA

WYDZIAŁ INŻYNIERII MECHANICZNEJ

KATEDRA MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN

PRACA DOKTORSKA

Mgr inż. Justyna Garus

STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA TŁUMIONYCH UKŁADÓW MECHANICZNYCH NA PRZYKŁADZIE UKŁADU ZMIANY WYSIĘGU ŻURAWIA SAMOCHODOWEGO

Promotor:

dr hab. inż. Wojciech Sochacki, prof. PCz

Częstochowa 2025

Spis treści

Streszczenie.....	5
Summary	7
Wykaz ważniejszych oznaczeń	9
1 Analiza stanu wiedzy.....	11
1.1 Metody analizy układów wzbudzanych parametrycznie	14
1.2 Dynamika belek Bernoulliego-Eulera i ich stateczność dynamiczna	15
1.3 Typy tłumienia występujące w maszynach	18
1.3.1 Tłumienie konstrukcyjne	19
1.3.2 Tłumienie wewnętrzne	20
1.3.3 Tłumienie zewnętrzne	21
1.4 Dynamika układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego	22
2 Cel i zakres pracy.....	26
3 Metodyka badań	29
3.1 Sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia brzegowego	29
3.2 Określenie warunku ortogonalności funkcji własnych.....	34
3.3 Sformułowanie zagadnienia stateczności dynamicznej	37

3.4 Wyznaczenie krzywych przejścia dla pierwszego obszaru niestatecznego metodą perturbacyjną	41
3.5 Przykładowe wyniki badań stateczności dynamicznej prostej belki	48
3.5.1 Badania wpływu rodzaju materiału na stateczność dynamiczną belki bez uwzględnienia tłumienia.....	48
3.5.2 Badanie wpływu tłumienia na stateczność dynamiczną belki Bernoulliego-Eulera ..	51
4 Układ zmiany wysięgu żurawia samochodowego z uwzględnieniem tłumienia	59
4.1 Sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia brzegowego	59
4.2 Określenie warunku ortogonalności funkcji własnych.....	71
4.3 Sformułowanie zagadnienia stateczności dynamicznej dla układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego	74
4.4 Parametry wykorzystywane w modelu.....	77
4.4.1 Parametry geometryczne i fizyczne	77
4.4.2 Wyznaczanie sztywności zastępczej trójczołowego wysięgnika teleskopowego ..	82
4.4.3 Wyznaczanie masy zastępczej układu.....	85
4.4.4 Model cieczy wypełniającej cylinder	87
4.4.5 Modelowanie układu linowego.....	89
4.5 Wpływ geometrii i obciążenia na częstotliwości własne układu nietłumionego.....	90
4.6 Wpływ tłumienia na wartości własne układu	94
4.7 Wpływ tłumienia na stateczność dynamiczną układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego	99

4.8 Podsumowanie.....	110
5 Wnioski i uwagi końcowe	113
Literatura	115
Spis rysunków.....	136
Spis tabel.....	141
Dodatki.....	142
D1. Elementy macierzy współczynników.....	142

Streszczenie

Przedmiotem niniejszej dysertacji jest analiza wpływu tłumienia na stateczność dynamiczną układów mechanicznych na przykładzie układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego.

Praca została podzielona na rozdziały obejmujące przegląd aktualnego stanu wiedzy, cel i zakres pracy oraz opis wykorzystywanych w pracy metod matematycznych. Badawcza część, w której analizowany jest cel i zakres pracy, składa się z analizy wpływu tłumienia na stateczność dynamiczną wybranych układów mechanicznych takich jak belka Bernoulliego-Eulera w rozdziale trzecim oraz w rozdziale czwartym układ zmiany wysięgu żurawia samochodowego. W ostatnim rozdziale przedstawiono wnioski i uwagi końcowe. Dodatkowo w dysertacji zawarto streszczenia w języku polskim i angielskim, listę istotnych oznaczeń oraz spisy literatury, rysunków i tabel. Jako dodatek zamieszczono elementy macierzy, które były wykorzystywane w obliczeniach.

W rozdziale dotyczącym metodyki badań jako przykładowy układ analizowano belkę Bernoulliego-Eulera. Korzystając z wariacyjnej zasady Hamiltona, po podstawieniu odpowiednich wariacji energii potencjalnej i kinetycznej, określono równanie ruchu i warunki brzegowe układu. Wyznaczono warunek ortogonalności funkcji własnych, po czym równanie ruchu zostało przekształcone do postaci równania Mathieu, którego współczynniki w korelacji z kartą Strutta pozwalają określić stateczność dynamiczną układu. Jako przykładowe, wykonano badania wpływu materiału belki na jej stateczność dynamiczną. Kolejnym etapem było zbadanie wpływu tłumienia konstrukcyjnego, tłumienia wewnętrznego i tłumienia zewnętrznego na stateczność dynamiczną belki Bernoulliego-Eulera. Wstępnie określono zakres rozwiązań niestatecznych dla nietłumionej belki. Wprowadzenie tłumienia konstrukcyjnego w podporach belki zwiększyło stateczność układu nie eliminując ryzyka wystąpienia zjawiska rezonansu parametrycznego. Tłumienie wewnętrzne nie spowodowało znaczących zmian stateczności w stosunku do układu nietłumionego. Natomiast wprowadzenie tłumienia zewnętrznego

pozwoiliło uzyskać rozwiazanie stateczne w caym analizowanym obszarze karty Strutta.

W rozdziale czwartym przeprowadzono analize wplywu tlumienia na statecznosc dynamiczna rzeczywistego ukladu jakim byl ukladu zmiany wysiegu zurawia samochodowego DST0285. Przedstawiony uklad skladatajacy sie z wysiegnika teleskopowego oraz silownika hydraulicznego modelowano z wykorzystaniem belek Bernoulliego–Eulera oraz wybranych elementow dyskretnych. Na wstepie sformulowano i rozwiazano zagadnienie brzegowe z wykorzystaniem wariacyjnej zasady Hamiltona, co pozwolilo na wyznaczenie rownan ruchu. Okreslone zostaly geometryczne warunki brzegowe oraz warunki ciaglosci i na ich podstawie otrzymano naturalne warunki brzegowe analizowanego ukladu. Wyznaczono warunek ortogonalnosci oraz przekształcono rownanie ruchu do postaci tlumionego rownania Mathieu. Okreslono parametry geometryczne i fizyczne przyjete do analizy badanego modelu. Kolejnym etapem badan byla analiza wplywu geometrii i obciazenia na czestosci wlasne ukladu nietlumionego oraz zbadanie wplywu tlumienia na wartosci wlasne ukladu. Przeprowadzona zostala analiza wystepowania zjawiska rezonansu parametrycznego dla wybranych przypadkow geometrii ukladu w zaleznosci od kata nachylenia wysiegnika, dlugosci olinowania i przyjeteo obciazenia. Zbadano rowniez wplyw rozpatrywanych rodzajow tlumienia na statecznosc dynamiczna ukladu zmiany wysiegu zurawia samochodowego.

W rozdziale piatym przedstawiono podsumowanie uzyskanych wynikow i zaproponowano kierunki dalszych mozliwych badan.

Summary

The subject of this dissertation is the analysis of the influence of damping on the dynamic stability of mechanical systems using the example of a truck crane boom change system.

The work has been divided into chapters covering a review of the current state of knowledge, the purpose and scope of the work and a description of the mathematical methods used in the work. The research part, in which the purpose and scope of the work are analyzed, consists of an analysis of the influence of damping on the dynamic stability of selected mechanical systems such as the Bernoulli-Euler beam in the third chapter and the truck crane boom change system in the fourth chapter. The last chapter presents conclusions and final remarks. Additionally, the dissertation contains summaries in Polish and English, a list of important symbols and lists of literature, figures and tables. The matrix elements used in the calculations are included as an appendix.

In the chapter on research methodology, the Bernoulli-Euler beam was analyzed as an example system. Using Hamilton's variational principle, after substituting the appropriate variations of potential and kinetic energy, the equation of motion and boundary conditions of the system were determined. The condition of orthogonality of eigenfunctions was determined, after which the equation of motion was transformed into the Mathieu equation, whose coefficients in correlation with the Strutt card allow determining the dynamic stability of the system. As an example, tests were carried out on the influence of the beam material on its dynamic stability. The next stage was to investigate the influence of structural damping, internal damping and external damping on the dynamic stability of the Bernoulli-Euler beam. The range of unstable solutions for the undamped beam was initially determined. The introduction of structural damping in the beam supports increased the stability of the system without eliminating the risk of parametric resonance. Internal damping did not cause significant changes in stability in relation to the undamped system. On the other hand, the introduction

of external damping allowed obtaining a stable solution in the entire analyzed area of the Strutt card.

In the fourth chapter, an analysis of the influence of damping on the dynamic stability of a real system, which was the system for changing the reach of the DST0285 truck crane, was carried out. The presented system consisting of a telescopic boom and a hydraulic actuator was modeled using Bernoulli–Euler beams and selected discrete elements. First, the boundary value problem was formulated and solved using Hamilton's variational principle, which allowed for determining the equations of motion. Geometric boundary conditions and continuity conditions were determined and based on them, the natural boundary conditions of the analyzed system were obtained. The orthogonality condition was determined and the equation of motion was transformed into the form of the damped Mathieu equation. The geometric and physical parameters adopted for the analysis of the tested model were determined. The next stage of the research was the analysis of the influence of geometry and load on the natural frequencies of the undamped system and the examination of the influence of damping on the eigenvalues of the system. An analysis of the occurrence of the parametric resonance phenomenon was carried out for selected cases of the system geometry depending on the boom inclination angle, the length of the rigging and the assumed load. The influence of the considered types of damping on the dynamic stability of the truck crane boom change system was also examined.

The fifth chapter presents a summary of the obtained results and proposes directions for further possible research.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

P – osiowa siła ściskająca, N,

P_0 – stała składowa obciążenia, N,

S – zmienna składowa obciążenia, N,

ν – częstość siły wymuszającej, Hz,

t – czas, s,

E – moduł Younga, GPa

J – moment bezwładności przekroju, m⁴,

A – pole powierzchni przekroju, m²,

ρ – gęstość materiału, kg/m³,

T – energia kinetyczna układu, J,

V – energia potencjalna układu, J,

W – przemieszczenie belki, m,

C_i – stałe z rozwiązania ogólnego równania przemieszczeń,

ω_n – n -ta częstość drgań własnych, rad/s,

l – długość belki, m,

a i b – parametry nietłumionego równania Mathieu,

C_R – współczynnik tłumienia tłumika rotacyjnego,

C_E – współczynnik tłumienia wywołanego zewnętrznym oporem wiskotycznym,

E^* – współczynnik lepkości materiału,

W_N – praca wirtualna sił niezachowawczych, J,

$T_n(t)$ – nieznana funkcja czasu,

δ , ϵ i c – parametry tłumionego równania Mathieu,

H – bezwymiarowy współczynnik tłumienia wewnętrznego dla belki,

N – bezwymiarowy współczynnik tłumienia zewnętrznego dla belki,

M – bezwymiarowy współczynnik tłumienia konstrukcyjnego dla belki,

H_s – bezwymiarowy współczynnik tłumienia wewnętrznego,

N_s – bezwymiarowy współczynnik tłumienia zewnętrznego,

M_s – bezwymiarowy współczynnik tłumienia konstrukcyjnego.

1 Analiza stanu wiedzy

Drgania mechaniczne są nierozzerwalnie związane praktycznie z każdym obszarem działalności człowieka. Można je zaobserwować w wielu dziedzinach inżynierii mechanicznej, lotniczej czy lądowej. Identyfikacja przyczyn ruchu drgającego pozwala na maksymalizację realizacji funkcji technologicznych, gdy drgania są korzystne dla projektu urządzenia, a jeśli ich występowanie jest niepożądane umożliwia eliminację niekorzystnych skutków. Zmienna w czasie siła obciążająca układ może wywołać narastające amplitudy drgań skutkując utratą stateczności dynamicznej. Gdy w czasie ruchu drgającego parametry układu, takie jak na przykład sztywność, siła wymuszająca, masa czy tłumienie ulegają zmianie, to taki rodzaj drgań nazywamy drganiami parametrycznymi. W rzeczywistych układach drgających zawsze występuje dyssypacja energii, między innymi na skutek występującego tłumienia, która wpływa na ograniczenie amplitud drgań. Możliwe jest wyróżnienie trzech głównych typów tłumienia: wewnętrzne (występujące na skutek zjawisk występujących wewnątrz materiału), zewnętrzne (związane z wpływem otoczenia) oraz konstrukcyjne (związane ze zmiennymi warunkami pracy oraz konstrukcją urządzenia). Zawarcie tłumienia w modelach matematycznych opisujących analizowane układy mechaniczne pozwala na wierniejsze odtworzenie zachodzących w obiektach rzeczywistych zjawisk dynamicznych.

Badania stateczności dynamicznej maszyn roboczych i ich elementów, które modelowano z wykorzystaniem układów ciągle-dyskretnych, przeprowadzano dotychczas najczęściej nie uwzględniając tłumienia drgań w modelach matematycznych. W niniejszej dysertacji analizowany jest wpływ różnych rodzajów tłumienia na stateczność dynamiczną układów mechanicznych na przykładzie układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego. Przedstawiony model oraz uzyskane na jego podstawie wyniki stanowią oryginalny wkład do aktualnych badań nad dynamiką układów tłumionych.

W celu ulepszania konstrukcji już istniejących maszyn i urządzeń lub projektowania nowych nowocześniejszych rozwiązań pozwalających na

zwiększenie wydajności pracy, bezpieczeństwa użytkowania oraz wydłużenia czasu eksploatacji należy wziąć pod uwagę takie czynniki jak to, że nowo opracowane rozwiązania najczęściej powinny charakteryzować się wzrostem prędkości ruchu, zwiększeniem jego zakresu, obniżeniem masy na przykład poprzez wykorzystanie nowoczesnych lekkich i wytrzymałych materiałów (kompozyty, materiały inteligentne) lub zwiększeniem maksymalnych obciążeń przy jednoczesnym zwiększaniu niezawodności. Jednoczesna realizacja nawet części z tych postulatów jest zadaniem trudnym w realizacji. Na przykład zmniejszenie masy przy jednoczesnym zwiększeniu maksymalnego obciążenia. Taka smukła konstrukcja przy obciążeniu zmienną w czasie siłą osiową jest narażona, w zadanych zakresach częstotliwości siły wymuszającej, na niekontrolowany wzrost amplitudy, który może doprowadzić do zniszczenia układu. Uwzględnienie w badanym układzie tłumienia drgań pozwala na bardziej precyzyjny opis tego zjawiska, a tym samym określić rzeczywisty ruch układu w czasie drgań parametrycznych. Dlatego analiza stateczności dynamicznej modelowanego układu mechanicznego z uwzględnieniem tłumienia ma tak zasadnicze znaczenie.

Szemplińska-Stupnicka w swojej pracy [1] zdefiniowała stateczność dynamiczną jako szczególny przypadek drgań parametrycznych w konstrukcjach obciążonych okresową funkcją czasu, w których wywołane drgania odbywają się w innym kierunku (najczęściej prostopadłym) niż obciążenie wymuszające drgania. Jest to więc obciążenie parametryczne względem niektórych postaci drgań. Stateczność dynamiczna jest również przez niektórych autorów nazywana stabilnością analizowanych układów.

Faraday w 1831 w pracy [2] zaobserwował wzbudzenie parametryczne jako pierwszy. Pierwsza teoretyczna analiza rezonansu parametrycznego została przedstawiona przez Beliaev'a w pracy [3], w której analizował stabilność prętów pryzmatycznych. Drgania i stabilność wzbudzonych parametrycznie układów zostały opisane przeglądowo przez Ibrahima i współpracowników [4], [5], Evana-Iwanoskiego [6], czy Simitseasa [7]. Materiały lepkosprężyste pozwalają na kontrolę drgań co zostało przedstawiono przez Nakrę w pracach [8], [9], [10] i [11].

Wymuszenia parametryczne i ich wpływ na stabilność dynamiczną układów zostały omówione w książkach Schmidta [12], Bolotina [13] oraz Neyfaha i Mooka [14]. W powyższych pracach badano wpływ różnych parametrów na niestabilność parametryczną układu, analizowano stabilność i typy rezonansów oraz poddawano ustalenia teoretyczne weryfikacji eksperymentalnej.

Korzystając z równania Mathieu i rozwiązując zagadnienie stateczności dynamicznej możliwe jest wyznaczenie krzywych przejścia oraz określenie obszarów statecznych i niestatecznych rozwiązań. Po uwzględnieniu tłumienia w analizowanych układach mechanicznych następuje zwężenie obszarów, w których występuje rezonans parametryczny, czyli następuje wzrost amplitudy drgań. Zawężenie oraz wzrost wartości minimum tych obszarów zwiększa stabilność modelowanego układu. Niejednokrotnie autorzy zajmujący się efektami parametrycznymi analizują różnorodne konstrukcje inżynierskie, w tym tak złożone jak na przykład mosty. Najczęściej przeprowadzana jest analiza prostych konstrukcji zbudowanych ze smukłych belek z dodanymi elementami dyskretnymi. Wiąże się to z faktem, że nawet tak złożone konstrukcje jak np. układ zmiany wysięgu żurawia samochodowego mogą być modelowane z wykorzystaniem belek, a dodanie tłumienia zwiększa dokładność modelu opisującego układ rzeczywisty.

W kolejnych podrozdziałach przedstawiono aktualny stan wiedzy związany z tematyką niniejszej dysertacji, w których szczególnie skupiono się na metodach analizy układów wzbudzanych parametrycznie. Następnie przedstawiono rys historyczny i aktualną literaturę odnośnie badań dynamiki belek Bernoulliego-Eulera wykorzystywanych w modelowaniu analizowanego układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego oraz stateczności dynamicznej różnych układów mechanicznych. W dalszej kolejności analizowano typy tłumienia występujące w maszynach i sposoby ich modelowania. Przedstawiono także analizę stanu wiedzy o dynamice układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego oraz wchodzącego w jego skład siłownika hydraulicznego.

1.1 Metody analizy układów wzbudzanych parametrycznie

Układy wzbudzone parametrycznie opisywane są równaniami różniczkowymi drugiego rzędu, w których współczynniki mają charakter okresowy, a same równania nie posiadają dokładnych rozwiązań. Rozwiązywanie tej klasy problemów koncentruje się wokół ustalenia czy istnieją dla nich rozwiązania okresowe i czy są to rozwiązania stabilne. W przypadku równań typu Mathieu-Hill znane są takie metody rozwiązywania jak techniki perturbacji i iteracji, metoda Bolotina na podstawie teorii Floqueta, druga metoda Lapunowa, metoda Galerkina oraz technika asymptotyczna Kryłowa, Bogoliubowa i Mitroploskiego.

Dla prostych rezonansów dobre wyniki uzyskuje się korzystając z metody Bolotina [13] opartej na teorii Floqueta. Metoda ta została zmodyfikowana dla układu, w którym występują złożone równania ruchu, przez Stevensa w pracy [15]. Dla układów, w których występują małe parametry wzbudzenia stabilność układów może być analizowana metodą zaproponowaną przez Hsu [16], [17]. Można dzięki niej określać strefy niestabilności typu głównego, różnicowego czy kombinowanego. Metoda następnie została zmodyfikowana przez Saito i Otomiego [18] by mogła być wykorzystywana w układach ze złożonym różniczkowym równaniem ruchu. Metoda zaproponowana przez Takahashi [19] pozwala na wyznaczenie prostych jak i kombinowanych obszarów niestabilności pomijając ograniczenie o małych parametrach wzbudzenia. Korzystając z metody Bolotina, Zajączkowski [20] oraz Zajączkowski i Lipiński [21] wyznaczyli równania pozwalające na określenie obszarów niestabilności. Metodę wolną od ograniczeń związanych z małymi parametrami wzbudzenia zaproponowali również Lau i in. w pracy [22].

Dużą popularność w analizie stabilności dynamicznej układów sprężystych zyskała metoda elementów skończonych. Korzystając z niej Brown i in. [23] analizowali stateczność dynamiczną prętów jednorodnych. Abbas [24] badał jak elastyczność mocowania i prędkość obrotowa wpływa na stabilność obracającej się belki. Abbas i Thomas [25] oraz Yokoyama [26] badali jak wpływają na stateczność dynamiczną belki Timoszenki warunki podparcia. Shastry i Rao

korzystając z metody elementów skończonych określili częstotliwości krytyczne [27] i granice stateczności [28] badając kolumnę wspornikową obciążoną pośrednim okresowym obciążeniem skupionym. Tą samą metodą Bauchau i Hong [29] badali stabilność belek i ich nieliniową odpowiedź, Briseghell i in. w pracy [30] analizowali stateczność dynamiczną belek i ram, a Svensson [31] analizował wpływ tłumienia na stabilność nieliniowego układu dynamicznego obciążonego okresowo.

W przypadku analizy układów charakteryzujących się większą liczbą stopni swobody występują nie tylko proste rezonanse, ale również rezonanse typu sumy lub różnicy w zależności od warunków podparcia, rodzaju obciążenia i parametrów układu. Klasyfikację różnych typów rezonansów dla liniowego układu okresowego przedstawił Mettler w pracy [32]. Powiększenie głównych obszarów niestabilności dynamicznej związane z momentem żyroskopowym w układzie dysku wału wspornikowego zostało wykazane w pracy [33] przez Chena i Ku. Stabilność dynamiczna pręta z defektem była badana przez Parekha i Carlsona w [34], gdzie zaproponowano model efektywnej sztywności odzwierciedlający zdolność magazynowania energii przez uszkodzony obszar. Ich koncepcja została wykorzystana w pracy [35] przez Datta i Nagraja do analizy uszkodzeń pręta stożkowego z wadami poprzez jego stateczność dynamiczną. Stabilność dynamiczna belki będącej pod wpływem okresowej siły osiowej i momentu obrotowego była analizowana teoretycznie i eksperymentalnie przez Dufour i Berlioz w [36].

1.2 Dynamika belek Bernoulliego-Eulera i ich stateczność dynamiczna

Stale, podobnie jak materiały o wysokiej wytrzymałości, są powszechnie wykorzystywane do wytwarzania konstrukcji oraz elementów maszyn i urządzeń, które mogą być modelowane z wykorzystaniem smukłych belek. Prowadzone są ciągłe prace pozwalające na doskonalenie metod produkcji, składu i struktury stosowanych materiałów jak również nad optymalizacją geometrii wytwarzanych z nich konstrukcji i elementów. Nie zawsze jednak o zniszczeniu konstrukcji decyduje wielkość siły obciążającej, ale jej charakter np. siła pulsacyjna. Już na

początku drugiej połowy XIX wieku w trakcie budowy mostów kolejowych zauważono, że uszkodzenia konstrukcji wynikały z utraty stateczności cienkich płyt, powłok i smukłych prętów. Przykłady takich zniszczeń można zobaczyć w pracach [37], [38], a jednym z najbardziej znanych był most Tacoma Narrows Bridge (TNB) z roku 1940 z uwagi na film, na którym widać oscylacje i zniszczenie mostu [39]. Tego typu zdarzenia zapoczątkowały intensywne badania w dziedzinie stateczności sprężystej.

Już w 1744 roku Leonard Euler opisywał w swojej pracy podstawy stateczności konstrukcji [40]. Rozwiązał on zagadnienie osiowego ściskania idealnego pręta przy różnych sposobach podparcia. W 1773 roku Lagrange pracował nad optymalizacją kształtu kolumny obciążonej siłą osiową [41], [42]. Problem jest o tyle istotny, że ciągle trwają prace w poszukiwaniu najbardziej optymalnych geometrii do danych zastosowań [43], [44], [45], [46], [47], [48]. Natomiast pierwszą pracą nad niekonserwatywną siłą obciążającą była praca Becka z 1952 roku [49], w której analizowano wpływ obciążenia siłą śledzącą końca kolumny na jej stateczność.

Istnieją różne teorie opisujące kinematykę deformacji belki rozumianej jako smukły i prosty element konstrukcyjny poddawany ściskaniu. Szerzej opisane są one w pracy [50], a najistotniejsze z nich to teorie: Bernoulliego-Eulera [51], [52], Timoshenki [53], [54], czy Reddy'ego-Bickford'a [55], [56], [57]. Ostatnia z nich została szerzej rozwinięta w pracach [58], [59]. Tematyka wyboczenia kolumn i konstrukcji opisywana była w literaturze między innymi w pracy [60], a stateczność dynamiczna w pracy [61]. Porównanie wybranych teorii zostało przedstawione w [62]. W niniejszej dysertacji analizowane będą belki według teorii Bernoulliego-Eulera.

Szczególny przypadek drgań parametrycznych, w których konstrukcje są obciążone obciążeniem okresowo zmiennym w czasie, nazywany jest statecznością dynamiczną [63]. Rezonanse parametryczne występujące w analizie stateczności dynamicznej odgrywają podstawową rolę. W obszarze rozwiązań niestatecznych amplituda drgań rezonansowych wzrasta nieograniczenie.

Większość prac ze stateczności dynamicznej koncentruje się wokół nieskomplikowanych układów belek, niekiedy z dołączonymi do nich elementami dyskretnymi [64], [65], [66], [67], [68], [69], [70], [71], [72], ponieważ wiele układów mechanicznych może być za ich pomocą modelowana.

Dla różnych typów obciążenia zmiennego Ahmadi i Glockner w pracy [73] określili kryteria stateczności dynamicznej dla belki. Cederbaum i Mond w pracy [74] analizowali stateczność dynamiczną dla sprężystej belki. Dla belki o podparciu sprężystym z wykorzystaniem sprężyn translacyjnych i rotacyjnych Majorana i Pellegrino badali jej stateczność dynamiczną w pracy [75]. Gürgöze [76] analizował wpływ podparte sprężyste masy umieszczonej na końcu belki na jej drgania, które były okresowo wymuszane ruchem drugiego końca belki. Drgania parametryczne belki z elementem dyskretnym – masą skupioną były rozpatrywane w pracy [77] przez Sato i innych. Analityczna i eksperymentalna analiza wpływu masy umieszczonej na końcu belki na stateczność dynamiczną została przeprowadzona przez Evensena i Evan-Iwanowskiego w [78]. Wpływ elementów dyskretnych na stateczność dynamiczną swobodnie podparte belki przedstawił Sochacki w pracach [79], [80]. Nowe typy rezonansów parametrycznych zostały przedstawione przez Krawczuka i Ostachowicza w [81], gdy analizowali drgania belki ze szczeliną zamkniętą. Stateczność dynamiczna belki wspornikowej zbudowanej z kompozytów była analizowana teoretycznie i eksperymentalnie przez Yen i Kuo w pracy [82]. Stateczność dynamiczną belki wstępnie skręconej analizował Gürgöze w pracy [83]. Chen i Yeh w pracy [84] badali stateczność dynamiczną pobudzonej elektromagnetycznie do drgań belki, przeprowadzając analizę teoretyczną i weryfikację eksperymentalną. W innej pracy badali jak oscylacyjny ruch masy skupionej wzdłuż osi kolumny wpływa na jej stateczność [85]. Ponadto badali wpływ oscylacyjnego obciążenia śledzącego na stateczność dynamiczną kolumny [86], [87]. Drgania parametryczne kolumny, która była obciążona siłą śledzącą, rozpatrywali także Sochacki i Tomski w pracy [88]. Ci sami autorzy w pracy [89] rozpatrywali stateczność dynamiczną układów dywergencyjnych pseudoflaterowych. W pracy [90] Hyun i Yoo analizowali stateczność dynamiczną dla belki wspornikowej, gdzie przedstawiony został diagram stabilizacyjny dla rozwiązań pierwszego i drugiego rzędu. Dla czterech

różnych rodzajów warunków brzegowych kolumny Leipholza analizowano stateczność parametryczną w pracy [91]. Prowadzone były również badania optymalizacji kolumny, obciążonej periodyczną siłą śledzącą, ze względu na jej stateczność dynamiczną. Badania te prowadzili w pracy [92] Foryś i Gajewski.

1.3 Typy tłumienia występujące w maszynach

W każdym układzie drgającym część energii ulega rozproszeniu [93], [94], [95], [96], [97]. Rozproszenie to wynika najczęściej z tłumienia drgań występującego w badanym układzie. W zależności od mechanizmów przeważających w danym układzie, to na jego ruch mogą wpływać różne rodzaje tłumienia. Pomimo ciągłych badań zjawiska tłumienia wciąż nie są poznane wszystkie mechanizmy fizyczne, które się na nie składają. W związku z tym każda reprezentacja matematyczna tłumienia w równaniach ruchu będzie zawsze pewnym przybliżeniem i uogólnieniem zjawisk fizycznych.

Drgania są najczęściej elementem niepożądanym w trakcie pracy różnych typów maszyn z uwagi na niekorzystny wpływ na zdrowie i życie operatorów. Powodują one takie problemy jak na przykład zaburzenia w układzie nerwowym, naczyniowym czy kostno-stawowym, problemy z koordynacją ruchową i ostrością widzenia. Ponadto drgania wpływają niekorzystnie na szybsze zużycie elementów roboczych i ich wytrzymałość. W pracach [93], [98], [99], [100] przedstawiono tego typu szkodliwe zjawiska, wywołane przez drgania. Zmniejszenie negatywnych skutków drgań najczęściej polega na wykorzystaniu zjawiska tłumienia. Wpływ zjawiska tłumienia na układy mechaniczne opisali w swoich pracach Osiński [98] i Giergiel [99]. Do naturalnych sposobów tłumienia należą tarcie w podporach i połączeniach, wpływ środowiska czy tarcie wewnętrzne w materiale. Dodatkowo w maszynach stosowane są również specjalne dodatkowe aktywne bądź dynamiczne eliminatory drgań [94], [98], [101], [102]. Między układem drgającym a izolowanym umieszczana jest czasem wibroizolacja wykonana z dodatkowych elementów konstrukcyjnych [98], [99], [100], [103].

Zjawisko rezonansu może być wywołane nawet przez drgania maszyny o niewielkiej amplitudzie [94], [104], [105], [106], a w konsekwencji doprowadzić do jej uszkodzenia bądź zniszczenia. Tłumienie umożliwia minimalizację wystąpienia zjawiska rezonansu. Tłumienie, w zależności od jego mechanizmu i źródła, można podzielić na tłumienie konstrukcyjne w nieruchomych połączeniach [107], [108], [109], tłumienie konstrukcyjne w ruchomych połączeniach [110], [111], [112], [113], [114], [115], tłumienie zewnętrzne związane z oporem ośrodka (wiskotyczne) [110], [111], [112], [116], [117] oraz tłumienie wewnętrzne w materiale lepkosprężystym [68], [118], [119], [120], [121].

1.3.1 Tłumienie konstrukcyjne

Tłumienie konstrukcyjne można podzielić na wywołane tarciem w połączeniach ruchomych i nieruchomych. Do połączeń ruchomych należą prowadnice, łożyska, przeguby i ślizgi. Natomiast do połączeń nieruchomych należą połączenia nitowane, włączane, klinowane i śrubowe.

Rozpraszanie energii w połączeniach nieruchomych zachodzi w połączonych elementach na powierzchni ich styku. Podczas obciążania takich elementów powstaje poślizg spowodowany sprężystością materiału, który opierając się na prawach Coulomba przyjmuje charakter tarcia suchego. Zakłada się, że powstająca siła tarcia jest proporcjonalną do nacisku wartością stałą, a jej kierunek jest przeciwny do prędkości ciała.

W połączeniach ruchomych tarcie zachodzi między elementami o wyraźnym ruchu względem siebie. W przypadku dużego smarowania charakter tarcia jest wiskotyczny. Przy braku smarowania tarcie przechodzi w tarcie suche. Jeżeli smarowanie nie jest zbyt obfite rozpraszanie energii jest związane z oboma zjawiskami.

Najczęściej tłumienie konstrukcyjne jest modelowane za pomocą rotacyjnych lub translacyjnych tłumików wiskotycznych zamontowanych w układzie.

Kompleksowa analiza modalna belki, która posiadała na końcach tłumiki rotacyjne

i była zamocowana przegubowo, wraz z procedurą numeryczną służącą do wyznaczenia zespolonych wartości własnych i postaci drgań została przedstawiona w pracy [122]. W pracach [123], [124] i [125] z kolei analizowano jak tłumienie konstrukcyjne wpłynęło na drgania poprzeczne złożonych układów dyskretno-ciągłych na przykładzie wysięgnika żurawia samochodowego jak i układu zmiany wysięgu.

Przyjęte w pracy określenie tłumienie konstrukcyjne posiada charakter wiskotyczno-Coulombowski i związane jest z cechami konstrukcyjnymi badanego układu. Przyjęte w pracy sposoby modelowania tłumienia konstrukcyjnego są zgodne z przedstawionymi w pracach [110], [111], [122].

1.3.2 Tłumienie wewnętrzne

Zjawiska zachodzące wewnątrz ciała drgającego, na skutek których następuje zmiana stanu odkształcenia i naprężenia, a w wyniku czego część energii jest rozpraszana, nazywane są tłumieniem wewnętrznym. Tarcie wewnątrz materiału jest główną przyczyną dyssypacji energii, wpływa również na tłumienie drgań swobodnych oraz wywołuje wiele zjawisk reologicznych.

Podstawowe modele reologiczne idealizują ciała fizyczne uwzględniając jedną z ich cech takich jak lepkość, plastyczność czy sprężystość. Takimi elementarnymi modelami są liniowy tłumik wiskotycznym, który jest wypełniony cieczą newtonoską, idealna sprężyna liniowa, która ma właściwości ciała Hook'a oraz tak zwane ciało Saint-Venenta, modelowane jako suwak z tarcie suchym o stałym określonym oporze [95], [98], [126], [127]. Najczęściej wykorzystywane do modelowania to wiskotycznym tłumik liniowy i idealna sprężyna liniowa [127]. Następnie z elementarnych modeli tworzy się możliwie najbardziej zgodne z rzeczywistością złożone modele reologiczne uwzględniając w analizie reologicznej wiele cech danego ciała. Do takich modeli należą między innymi modele Maxwella, Zenera i Kelvina-Voigta. Ostatni z wymienionych jest równoległym połączeniem tłumika wiskotycznego i sprężyny, i w obliczeniach jest najczęściej wykorzystywany jako model liniowego ciała lepkosprężystego [98],

[127], [128], [129]. Model reologiczny Maxwella jest natomiast szeregowym połączeniem sprężyny i tłumika wiskotycznego [127]. Połączenie tych dwóch modeli nazywane jest modelem reologicznym Zenera [130], czyli połączenie równoległe sprężyny i modelu Maxwella, nazywany jest on standardowym modelem trójparymetrowym.

W pracach [131], [132], [133] analizowano jak tłumienie wewnętrzne wpływa na drgania belki. W pracy [145] badano wpływ tłumienia wewnętrznego na drgania belki wspornikowej, na której swobodnym końcu zamocowana była masa. Zaproponowany w niej został również dyskretny model zastępczy jako układ sprężyna-tłumik-masa. Dla niekonserwatywnych układów belek analizowano wpływ tłumienia zewnętrznego i wewnętrznego na stateczność w pracy [132]. Stateczność obciążonej siłą śledzącą belki wspornikowej w zależności od tłumienia wewnętrznego badana była w pracy [133]. Wpływ tłumienia wewnętrznego materiału, z którego zbudowano analizowane obiekty, badano w pracach [68], [119], [120], [121], [134]. Drgania poprzeczne układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego z uwzględnieniem tłumienia wewnętrznego analizowano w pracy [68]. Model Kelvina-Voigta został wykorzystany w pracy [119] do opisu tłumienia wewnętrznego podczas drgań poprzecznych utwierdzonej lepko-sprężystej belki w przypadku, gdy na jej swobodnym końcu dołączono masę skupioną. W pracy [120] badano zagadnienie stateczności i drgań nieliniowego układu dwuczłonowego z uwzględnieniem tłumienia wewnętrznego. Badanie wpływu lokalnych zmian tłumienia wewnętrznego na drgania obciążonej jednorodnej belki Timoshenki przeprowadzono w pracy [121]. Belka Bernoulliego-Eulera jednostronnie utwierdzona z masą skupioną na swobodnym końcu i z przymocowanym tłumikiem translacyjnym badana była po kątem wpływu lokalizacji mocowania tłumika i współczynnika tłumienia na wartości własne w pracy [134].

1.3.3 Tłumienie zewnętrzne

Środowisko zewnętrzne również wpływa na rozpraszanie energii układu. Siły zewnętrznego tarcia na granicy ośrodków podczas ruchu, między ciałem a

otoczeniem takim jak gazy bądź ciecze, w których jest zanurzony układ, wpływają na dyssypację energii. Złożony problem tłumienia zewnętrznego, najczęściej modelowany jest poprzez tłumienie wiskotyczne. Drgania belek o skokowo zmiennej sztywności pod wpływem tłumienia zewnętrznego analizowano w pracy [135]. Wpływ tłumienia zewnętrznego na drgania belki o zmiennej sztywności z przymocowaną do wolnego końca masą badano w pracy [136]. Wpływ wiskotycznego tłumienia zewnętrznego na drgania układów analizowano w pracach [137], [138], [139], [140]. W pracy [138] badano jak niejednorodne tłumienie zewnętrzne wpływa na drgania belki Bernoulliego-Eulera o zmiennej sztywności podpartej przegubowo. Podobna analiza została przeprowadzona dla wielosegmentowego pręta w pracy [139]. Natomiast w pracy [137] badano wielosegmentową belkę utwierdzoną jednostronnie z dodaną na swobodnym końcu masą. Stateczność smukłych niekonserwatywnych układów pod wpływem tłumienia zewnętrznego i wewnętrznego analizowano w pracy [140].

1.4 Dynamika układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego

Projektowanie maszyn jest procesem, w którym dąży się do zmniejszenia kosztów produkcji, a projektanci starają się zwiększyć obciążenia, bezpieczeństwo i niezawodność maszyn, przy jednoczesnej redukcji masy. Gdy maszyna poddawana jest w trakcie pracy zmiennym obciążeniom to znacząco zwiększa się możliwość awarii spowodowana wytrzymałością zmęczeniową. Dlatego badania stateczności dynamicznej mają tak istotne znaczenie w analizie wytrzymałości konstrukcji mechanicznych.

Analiza dynamiczna takich maszyn jak żurawie samojezdne, żurawie wieżowe, suwnice, dźwignice oraz ich podzespołów i elementów jest ciągłym przedmiotem badań [141], [142], [143], [144], [145], [146].

Modelowanie obiektów rzeczywistych jest złożonym procesem i wiele prac jest poświęconych podstawowym zagadnieniom projektowania maszyn. Takimi pracami są między innymi [1], [147], [148], [149], [150], [151], [152], [153], [154], [155] i przedstawiono w nich wiele sposobów w jaki można modelować i

rozwiązywać zagadnienia dynamiki analizowanych układów mechanicznych czy ich elementów.

Przykładem maszyny o wysokim stopniu złożoności poddawanej dużym obciążeniom jest żuraw samochodowy. Prowadzone były badania, w których analizowano drgania podłużne, poprzeczne i parametryczne w płaszczyźnie obrotu lub podnoszenia żurawia [141], [143], [156], [157], [158], [159], [160], [161], [162], [163], [164], [165].

Układ zmiany wysięgu jako podstawowa część żurawia samochodowego ma istotny wpływ na dynamikę ładunku oraz całej maszyny. Konstrukcyjnie układ zmiany wysięgu składa się z teleskopowego wysięgnika, siłownika zmiany wysięgu i układu linowego wraz z ładunkiem. Wysięgnik teleskopowy jest wieloczęłowym elementem, który złożony jest z segmentów o budowie skrzynkowej, układu lin na wielokrążkach oraz siłownika hydraulicznego. W wielu pracach przedstawiono drgania wysięgników teleskopowych oraz współpracujących z nimi siłowników hydraulicznych. Są to między innymi [114], [124], [141], [157], [158], [159], [163], [164], [166]. W pracach tych analizowano układy nieliniowe i liniowe pod kątem drgań swobodnych i/lub parametrycznych. W pracy [158] analizowano drgania w płaszczyźnie podnoszenia trójczłonowego wysięgnika reprezentowanego belkami Bernoulliego-Eulera, siłownik zmiany wysięgu modelowano jako układ dyskretno–ciągły, a sprężyny reprezentowały ślizgi. Drgania, w płaszczyźnie podnoszenia, układu zmiany wysięgu dla dwuczłonowego wysięgnika modelowanego belkami Bernoulliego-Eulera, z siłownikiem zmiany wysięgu przedstawionym jako model dyskretny analizowano w pracy [166]. Model dyskretny tego samego układu o jednym stopniu swobody w płaszczyźnie obrotu analizowano w pracy [163]. Drgania swobodne w układzie zmiany wysięgu żurawia samochodowego badano w pracy [167], a drgania parametryczne i swobodne tego samego układu badano w [168]. Analizę drgań tłumionych uproszczonego wysięgnika przedstawiono w pracy [124]. Wykorzystano model reologiczny Kelvina-Voighta do modelowania lepkosprężystego materiału belek, ponadto uwzględniono opory ruchu w

podporach wysięgnika i siłownika. Na podstawie przeprowadzonej analizy wykazano wpływ tłumienia w podporach na stopień zaniku amplitudy drgań.

Układ zmiany wysięgu żurawia samochodowego jest zespołem elementów sprężystych, na który działa siła związana z ładunkiem zawieszonym na linie. Jeżeli układ jest obciążony siłą zmienną w czasie, co w przypadku żurawia występuje w momencie poderwania ładunku lub nagłego jego zatrzymania w czasie opuszczania, amplituda drgań układu może liniowo wzrastać w czasie na skutek zjawiska rezonansu parametrycznego. Podobna sytuacja ma miejsce, gdy zmienna w czasie siła działa na inne urządzenia mechaniczne. Przykładem może być siłownik podpory górniczej, gdzie zmienne ruchy otoczenia w zabezpieczanych górotworach powodują powstanie oscylującej siły, która może skutkować występowaniem zjawiska rezonansu parametrycznego i ostatecznie doprowadzić do zniszczenia układu. Badania teoretyczne modeli siłowników pozwalają wyznaczać częstotliwości i wartości własne drgań, siły oddziałujące na rurę cylindra i tłoczysko, czy wyznaczać stateczność dynamiczną analizowanej konstrukcji.

Analizę stateczności i drgań swobodnych siłownika hydraulicznego przedstawiono w pracy [169], gdzie siłownik mocowano do konstrukcji bazowej z wykorzystaniem sprężyn obrotowych. Wyniki badań częstotliwości drgań własnych oraz stateczności dynamicznej w zależności od geometrii i obciążenia układu przedstawiono w pracy [170]. Wpływ tłumienia na drgania siłownika przedstawiany był również w pracach [171], [172], [173], [174]. Badany był wpływ tłumienia wewnętrznego [171] i zewnętrznego [172] na drgania siłownika. Siłowniki najczęściej modeluje się jako elementy połączone z innymi elementami konstrukcji za pomocą złączy przegubowych. W złączach takich podczas pracy na skutek korozji, podwyższonego tarcia związanego ze zmiennymi warunkami pracy, czy zmiennym obciążeniem powstają opory ruchu. Modelując w takim przypadku siłownik, aby jak najbardziej odzwierciedlić rzeczywiste warunki pracy wprowadza się tłumiki rotacyjne w mocowaniach siłownika [173]. W pracy [175] dla belki Bernoulliego–Eulera z tłumikami wiskotycznymi w miejscach mocowań wykonano analizę modalną. Model reologiczny Kelvina-Voigta był wykorzystany w pracy [174]

do sformułowania i rozwiązania problemu tłumienia wewnętrznego drgań siłownika hydraulicznego. Poza tłumieniem wewnętrznym drgań siłownika uwzględniono w pracy tłumienie zewnętrzne jak i konstrukcyjne.

2 Cel i zakres pracy

Celem niniejszej pracy doktorskiej, wykonywanej w zakresie inżynierii mechanicznej, jest modelowanie i analiza stateczności dynamicznej układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego z uwzględnieniem wpływu różnego rodzaju tłumienia drgań na jego stateczność dynamiczną.

W rozprawie przyjęto tezę, że uwzględnienie tłumienia drgań w układzie zmiany wysięgu żurawia samochodowego nie eliminuje możliwości utraty stateczności dynamicznej układu.

Aby osiągnąć planowany cel badawczy prace podzielono na następujące etapy:

1. Przedstawienie metodyki badań zastosowanej w pracy poprzez wykonanie badania drgań i stateczności dynamicznej prostej belki Bernoulliego-Eulera, w której uwzględniono tłumienie drgań, a w szczególności:

- sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia brzegowego drgań belki,
- określenie warunku ortogonalności funkcji własnych belki,
- przekształcenie równania ruchu belki do postaci równania Mathieu,
- wykorzystanie metody małego parametru do określenia pierwszego obszaru niestateczności na karcie Strutta,
- rozwiązanie zagadnienia stateczności dynamicznej belki.

2. Modelowanie układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego, w którym uwzględniono tłumienie drgań, a w szczególności:

- wykonanie modelu fizycznego układu,
- wyznaczanie sztywności zastępczej trójcylindrowego wysięgnika teleskopowego,
- wyznaczanie masy zastępczej układu,
- określenie sztywności zastępczej cieczy wypełniającej cylinder siłownika,
- modelowanie układu linowego.

3. Sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia drgań i stateczności dynamicznej układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego, w którym uwzględniono tłumienie drgań, a w szczególności:

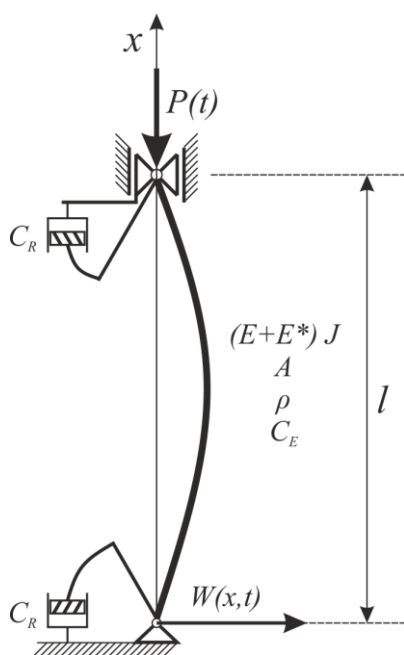
- sformułowanie na podstawie zasady Hamiltona zagadnienia drgań poprzecznych w płaszczyźnie podnoszenia wysięgnika,
- rozwiązanie zagadnienia drgań układu i określenie jego funkcji własnych,
- określenie warunków ortogonalności funkcji własnych,
- sformułowanie w oparciu o metodę sumowania funkcji własnych zagadnienia stateczności dynamicznej,
- przeprowadzenie analizy rozwiązań otrzymanego równania Mathieu w postaci $\frac{\partial^2 T(\tau)}{\partial \tau^2} + c \frac{\partial T(\tau)}{\partial \tau} + (\delta + \epsilon \cos \tau)T(\tau) = 0$ opisującego stateczność dynamiczną badanego układu,
- określenie zakresów długości olinowania, przy określonych pozostałych parametrach geometrycznych i fizycznych modelu, dla których otrzymano stateczne rozwiązania równania Mathieu,
- zbadanie wpływu pozostałych parametrów geometrycznych i obciążenia na stateczność dynamiczną badanego układu,
- analiza wpływu rozważanych w pracy rodzajów tłumienia na stateczność dynamiczną układu.

Rozwiązania zagadnień drgań i stateczności dynamicznej analizowanych układów zostały zrealizowane z wykorzystaniem autorskiego oprogramowania i programu Mathematica.

3 Metodyka badań

3.1 Sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia brzegowego

Zastosowaną metodykę dotyczącą sformułowania i rozwiązania zagadnienia brzegowego oraz stateczności dynamicznej badanego w pracy układu przedstawiono na przykładzie prostej belki Bernoulliego-Eulera. Na rys. 3.1 przedstawiono przegubowo podpartą na końcach belkę obciążoną osiową siłą ściskającą opisaną zależnością $P(t) = P_0 + S \cos \nu t$, gdzie P_0 jest stałą składową obciążenia, S jest zmienną składową obciążenia, ν to częstość siły wymuszającej, a t określa czas. Własności materiałowe belki określone są przez moduł Younga E , moment bezwładności przekroju na zginanie J , pole powierzchni przekroju A oraz gęstość materiału ρ . W układzie tym uwzględniono tłumienie wewnętrzne lepkością materiału belki (model reologiczny Kelvina-Voigta), tłumienie zewnętrzne medium otaczającego belkę i tłumienie konstrukcyjne w przegubach podparcia belki. Poszczególne rodzaje tłumienia na rysunku 3.1. oznaczono jako: E^* – współczynnik lepkości materiału, C_E – współczynnik zewnętrznego oporu wiskotycznego i C_R – współczynniki tłumienia tłumików rotacyjnych modelujących opory ruchu w podporach przegubowych belki.



Rys. 3.1. Prosta belka Bernoulliego-Eulera obciążona siłą osiową ściskającą zmieniającą się cyklicznie z uwzględnieniem tłumienia.

Przy uwzględnieniu tłumienia zagadnienie brzegowe poprzecznych drgań prostej belki Bernoulliego-Eulera rozwiązano z wykorzystaniem zasady wariacyjnej Hamiltona dla układów niezachowawczych [176] w postaci

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_N dt = 0$$

W równaniu (3.1) uwzględniono pracę wirtualną sił niezachowawczych jako

$$\begin{aligned} \delta W_N = & E^* J \frac{\partial^3 W(0, t)}{\partial x^2 \partial t} \delta \frac{\partial W(0, t)}{\partial x} - E^* J \frac{\partial^3 W(l, t)}{\partial x^2 \partial t} \delta \frac{\partial W(l, t)}{\partial x} \\ & + E^* J \frac{\partial^4 W(l, t)}{\partial x^3 \partial t} \delta W(l, t) - E^* J \frac{\partial^4 W(0, t)}{\partial x^3 \partial t} \delta W(0, t) \\ & - \int_0^l E^* J \frac{\partial^5 W(x, t)}{\partial x^4 \partial t} \delta W(x, t) dx - \int_0^l C_E \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} \delta W(x, t) dx \\ & - C_R \frac{\partial^2 W(0, t)}{\partial x \partial t} \delta \frac{\partial W(0, t)}{\partial x} + C_R \frac{\partial^2 W(l, t)}{\partial x \partial t} \delta \frac{\partial W(l, t)}{\partial x} \end{aligned}$$

Wariacja energii sprężystości zginania wynosi

$$\begin{aligned} \delta V_1 = & EJ \frac{\partial^2 W(l, t)}{\partial x^2} \delta \frac{\partial W(l, t)}{\partial x} - EJ \frac{\partial^2 W(0, t)}{\partial x^2} \delta \frac{\partial W(0, t)}{\partial x} - EJ \frac{\partial^3 W(l, t)}{\partial x^3} \delta W(l, t) \\ & + EJ \frac{\partial^3 W(0, t)}{\partial x^3} \delta W(0, t) + \int_0^l EJ \frac{\partial^4 W(x, t)}{\partial x^4} \delta W(x, t) dx \end{aligned}$$

Natomiast wariacja energii pochodzącej od obciążenia zewnętrznego wynosi

$$\delta V_2 = \int_0^l P(t) \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \delta W(x,t) dx - P(t) \frac{\partial W(l,t)}{\partial x} \delta W(l,t) + P(t) \frac{\partial W(0,t)}{\partial x} \delta W(0,t)$$

Wariację energii kinetycznej określono jako

$$\delta T = \varrho A \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} \delta W(x,t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_0^l \varrho A \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} \delta W(x,t) dx$$

Przyjmując $t = t_1$ i $t = t_2$ wartość wariacji $\delta W(x,t)$ jest równa zero, co po podstawieniu do (3.5) daje

$$\delta T = - \int_0^l \varrho A \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} \delta W(x,t) dx$$

Podstawiając (3.2), (3.3), (3.4) i (3.5) do równania (3.1) otrzymano

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left(-JE \frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4} - JE^* \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4} - \varrho A \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} - P(t) \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} - \right. \\ & C_E \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} \Big) \delta W(x,t) dx dt - \left(EJ \frac{\partial^2 W(l,t)}{\partial x^2} + E^* J \frac{\partial^3 W(l,t)}{\partial x^2 \partial t} + C_R \frac{\partial W(l,t)}{\partial t} \right) \delta \frac{\partial W(l,t)}{\partial x} + \\ & \left(EJ \frac{\partial^2 W(0,t)}{\partial x^2} + E^* J \frac{\partial^3 W(0,t)}{\partial x^2 \partial t} - C_R \frac{\partial W(0,t)}{\partial t} \right) \delta \frac{\partial W(0,t)}{\partial x} + \left(EJ \frac{\partial^3 W(l,t)}{\partial x^3} + E^* J \frac{\partial^4 W(l,t)}{\partial x^3 \partial t} + \right. \\ & \left. P(t) \frac{\partial W(l,t)}{\partial x} \right) \delta W(l,t) - \left(EJ \frac{\partial^3 W(0,t)}{\partial x^3} + E^* J \frac{\partial^4 W(0,t)}{\partial x^3 \partial t} + P(t) \frac{\partial W(0,t)}{\partial x} \right) \delta W(0,t) = 0 \end{aligned}$$

Z równania (3.7) określono różniczkowe równanie ruchu drgań poprzecznych belki jako

$$JE \frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4} + JE^* \frac{\partial^5 W(x,t)}{\partial x^4 \partial t} + \varrho A \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} + P(t) \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} + C_E \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = 0$$

Dzieląc obie strony przez JE otrzymano

$$\frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4} + \frac{E^*}{E} \frac{\partial^5 W(x,t)}{\partial x^4 \partial t} + \frac{\varrho A}{JE} \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} + \frac{P(t)}{JE} \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} + \frac{C_E}{JE} \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = 0$$

Dla układu przedstawionego na rys. 3.1 geometryczne warunki brzegowe wynoszą

$$W(0, t) = W(l, t) = 0$$

Wyznaczone poprzez podstawienie równania (3.10) do (3.7) naturalne warunki brzegowe wynoszą

$$J \left(E + E^* \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 W(0, t)}{\partial x^2} = C_R \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial W(0, t)}{\partial x}$$

$$J \left(E + E^* \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 W(l, t)}{\partial x^2} = -C_R \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial W(l, t)}{\partial x}$$

Rozwiązanie równania (3.9) przewidywane jest w postaci szeregu funkcji własnych

$$W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) T_n(t)$$

gdzie $w_n(x)$ jest n -tą funkcją własną, a $T_n(t)$ jest nieznaną funkcją czasu.

Aby wyznaczyć funkcje własne należy rozwiązać zagadnienie drgań kolumny przy założeniu, że część zmienna obciążenia S jest równa 0.

W celu rozdzielenia zmiennych w równaniu (3.9) oraz w warunkach brzegowych (3.10-3.12), przyjęto:

$$W(x, t) = w(x)T(t) = w(x)e^{j\omega t}$$

gdzie: j jest zespoloną wartością własną równą $j = \text{Re}(j) + j\text{Im}(j)$, $j = \sqrt{-1}$.

Mając na względzie przyjętą postać rozwiązania to część rzeczywista zespolonej wartości własnej jest tłumioną częstością drgań, natomiast część urojona jest współczynnikiem zaniku amplitud drgań.

Po podstawieniu (3.14) do równania (3.9) otrzymano

$$e^{j\omega t} \left(1 + \frac{j\omega E^*}{E} \right) \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} - e^{j\omega t} \frac{\varrho A \omega^2}{JE} w(x) + e^{j\omega t} \frac{P(t)}{JE} \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} + e^{j\omega t} \frac{j\omega C_E}{JE} w(x) = 0$$

Dzieląc obie strony przez $e^{j\omega t}$ otrzymano

$$\left(1 + \frac{j\omega E^*}{E} \right) \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} + \frac{P(t)}{JE} \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} - \left(\frac{\varrho A \omega^2}{JE} - \frac{j\omega C_E}{JE} \right) w(x) = 0$$

A następnie dzieląc przez $\left(1 + \frac{j\omega E^*}{E} \right)$ otrzymano

$$\frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} + \frac{P}{J(E+j\omega E^*)} \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} - \frac{\varrho A \omega^2 - j\omega C_E}{J(E+j\omega E^*)} w(x) = 0$$

Podstawiając $d^2 = \frac{P}{J(E+j\omega E^*)}$ oraz $\Omega^2 = \frac{\varrho A \omega^2 - j\omega C_E}{J(E+j\omega E^*)}$ i wstawiając (3.13) do (3.9) otrzymano

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + d^2 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - \Omega^2 w(x) = 0$$

Warunki brzegowe po rozdzieleniu zmiennych przyjmują postać

$$w(0) = w(l) = 0$$

$$J(E + j\omega E^*) \frac{\partial^2 w(0)}{\partial x^2} = j\omega C_R \frac{\partial w(0)}{\partial x}$$

$$J(E + j\omega E^*) \frac{\partial^2 w(l)}{\partial x^2} = -j\omega C_R \frac{\partial w(l)}{\partial x}$$

Rozwiązaniem ogólnym równania przemieszczeń (3.18) jest funkcja

$$w(x) = C_1 \cosh(\alpha x) + C_2 \sinh(\alpha x) + C_3 \cos(\beta x) + C_4 \sin(\beta x)$$

gdzie

$$\alpha = \sqrt{-\frac{1}{2}d^2 + \sqrt{\frac{1}{4}d^4 + \Omega^2}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}d^2 + \sqrt{\frac{1}{4}d^4 + \Omega^2}}$$

Wstawiając rozwiązanie (3.22) do równań (3.19)-(3.21) otrzymano jednorodny układ równań A względem nieznanych stałych C_i . Układ ten w postaci macierzowej zapisano jako

$$[A](\omega)\mathbf{C} = 0$$

gdzie $[A](\omega) = [a_{pq}]$; $[p, q] = (1 - 4)$, a $\mathbf{C} = [C_i]^T$; $i = 1 - 4$.

W przypadku, gdy przy stałych C_i wyznacznik macierzy współczynników jest równy zero to układ posiada nietrywialnie rozwiązanie.

$$\det A(\omega) = 0$$

Znalezienie zespolonych wartości własnych macierzy $A(\omega)$ prowadzi do wyznaczenia tłumionych częstości drgań oraz stopnia zaniku amplitud drgań rozpatrywanego układu.

3.2 Określenie warunku ortogonalności funkcji własnych

Aby rozwinąć funkcje własne w szereg (3.13) założono ich ortogonalność. Równanie (3.17) po rozdzieleniu zmiennych dla n -tej i m -tej funkcji własnej przyjmują postać

$$J(E + j\omega_n E^*) \frac{\partial^4 w_n(x)}{\partial x^4} + P_0 \frac{\partial^2 w_n(x)}{\partial x^2} + (-\varrho A \omega_n^2 + j\omega_n C_E) w_n(x) = 0$$

$$J(E + j\omega_m E^*) \frac{\partial^4 w_m(x)}{\partial x^4} + P_0 \frac{\partial^2 w_m(x)}{\partial x^2} + (-\varrho A \omega_m^2 + j\omega_m C_E) w_m(x) = 0$$

Po przemnożeniu (3.27) przez $w_m(x)$ i (3.28) przez $w_n(x)$ otrzymano

$$J(E + j\omega_n E^*) \frac{\partial^4 w_n(x)}{\partial x^4} w_m(x) + P_0 \frac{\partial^2 w_n(x)}{\partial x^2} w_m(x) + (-\varrho A \omega_n^2 + j\omega_n C_E) w_n(x) w_m(x) = 0$$

$$J(E + j\omega_m E^*) \frac{\partial^4 w_m(x)}{\partial x^4} w_n(x) + P_0 \frac{\partial^2 w_m(x)}{\partial x^2} w_n(x) + (-\varrho A \omega_m^2 + j\omega_m C_E) w_m(x) w_n(x) = 0$$

Następnie przeprowadzono całkowanie równań (3.29) i (3.30) w granicach od 0 do l i otrzymano

$$J(E + j\omega_n E^*) \int_0^l \frac{\partial^4 w_n(x)}{\partial x^4} w_m(x) dx + P_0 \int_0^l \frac{\partial^2 w_n(x)}{\partial x^2} w_m(x) dx - (\varrho A \omega_n^2 - j\omega_n C_E) \int_0^l w_n(x) w_m(x) dx = 0$$

$$J(E + j\omega_m E^*) \int_0^l \frac{\partial^4 w_m(x)}{\partial x^4} w_n(x) dx + P_0 \int_0^l \frac{\partial^2 w_m(x)}{\partial x^2} w_n(x) dx - (\varrho A \omega_m^2 - j\omega_m C_E) \int_0^l w_m(x) w_n(x) dx = 0$$

Całkując przez części pierwszą całkę z równania () w oznaczonych granicach otrzymano

$$\int_0^l \frac{\partial^4 w_n(x)}{\partial x^4} w_m(x) dx = w_m(x) \frac{\partial^3 w_n(x)}{\partial x^3} \Big|_0^l - \frac{\partial w_m(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_n(x)}{\partial x^2} \Big|_0^l + \int_0^l \frac{\partial^2 w_n(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_m(x)}{\partial x^2} dx$$

Analogiczne do (3.33) przekształcenie zastosowano do równania (3.32) otrzymując

$$\int_0^l \frac{\partial^4 w_m(x)}{\partial x^4} w_n(x) dx = w_n(x) \frac{\partial^3 w_m(x)}{\partial x^3} \Big|_0^l - \frac{\partial w_n(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_m(x)}{\partial x^2} \Big|_0^l + \int_0^l \frac{\partial^2 w_m(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_n(x)}{\partial x^2} dx$$

Podstawiając (3.33) i (3.34) odpowiednio do (3.31) i (3.32) i odejmując stronami otrzymujemy

$$\begin{aligned} & w_m(x) \frac{\partial^3 w_n(x)}{\partial x^3} \Big|_0^l - \frac{\partial w_m(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_n(x)}{\partial x^2} \Big|_0^l + \int_0^l \frac{\partial^2 w_n(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_m(x)}{\partial x^2} dx - w_n(x) \frac{\partial^3 w_m(x)}{\partial x^3} \Big|_0^l + \\ & \frac{\partial w_n(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_m(x)}{\partial x^2} \Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial^2 w_m(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_n(x)}{\partial x^2} dx + \frac{P_0}{J(E+j\omega_n E^*)} \int_0^l \frac{\partial^2 w_n(x)}{\partial x^2} w_m(x) dx - \\ & \frac{P_0}{J(E+j\omega_m E^*)} \int_0^l \frac{\partial^2 w_m(x)}{\partial x^2} w_n(x) dx + \frac{(\varrho A \omega_n^2 - j\omega_n C_E)}{J(E+j\omega_n E^*)} \int_0^l w_n(x) w_m(x) dx - \\ & \frac{(\varrho A \omega_m^2 - j\omega_m C_E)}{J(E+j\omega_m E^*)} \int_0^l w_m(x) w_n(x) dx = 0 \end{aligned}$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$\begin{aligned} & w_m(x) \frac{\partial^3 w_n(x)}{\partial x^3} \Big|_0^l - \frac{\partial w_m(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_n(x)}{\partial x^2} \Big|_0^l - w_n(x) \frac{\partial^3 w_m(x)}{\partial x^3} \Big|_0^l + \frac{\partial w_n(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_m(x)}{\partial x^2} \Big|_0^l + \\ & \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w_n(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_m(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_m(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_n(x)}{\partial x^2} \right) dx + \frac{P_0}{J(E+j\omega_n E^*)} \int_0^l \frac{\partial^2 w_n(x)}{\partial x^2} w_m(x) dx - \\ & \frac{P_0}{J(E+j\omega_m E^*)} \int_0^l \frac{\partial^2 w_m(x)}{\partial x^2} w_n(x) dx + \left(\frac{(\varrho A \omega_n^2 - j\omega_n C_E)}{J(E+j\omega_n E^*)} - \right. \\ & \left. \frac{(\varrho A \omega_m^2 - j\omega_m C_E)}{J(E+j\omega_m E^*)} \right) \int_0^l w_n(x) w_m(x) dx = 0 \end{aligned}$$

Uwzględniając warunki brzegowe (3.19), (3.20) i (3.21) oraz upraszczając równanie (3.36) otrzymano

$$\left(\frac{(\varrho A \omega_n^2 - j\omega_n C_E)}{J(E+j\omega_n E^*)} - \frac{(\varrho A \omega_m^2 - j\omega_m C_E)}{J(E+j\omega_m E^*)} \right) \int_0^l w_n(x) w_m(x) dx = 0$$

Ponieważ $\omega_m \neq \omega_n$, gdy $m \neq n$, to

$$\int_0^l w_n(x) w_m(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \gamma_m^2 = \int_0^l w_m^2(x) dx & m = n \end{cases}$$

Poszukiwany warunek ortogonalności określony jest poprzez wzór (3.38).

3.3 Sformułowanie zagadnienia stateczności dynamicznej

W celu sformułowania zagadnienia stateczności dynamicznej układu wykorzystano rozwiązanie równania jego ruchu (3.8) w postaci szeregu funkcji własnych układu (3.13).

Po podstawieniu funkcji własnych (3.13) do równania (3.8) otrzymano

$$JE \frac{\partial^4 \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) T_n(t)}{\partial x^4} + JE^* \frac{\partial^5 \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) T_n(t)}{\partial x^4 \partial t} + \varrho A \frac{\partial^2 \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) T_n(t)}{\partial t^2} + (P_0 + S \cos vt) \frac{\partial^2 \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) T_n(t)}{\partial x^2} + C_E \frac{\partial \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) T_n(t)}{\partial t} = 0$$

Przekształcając (3.39) otrzymano

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(JE \frac{\partial^4 w_n(x)}{\partial x^4} T_n(t) + JE^* \frac{\partial^4 w_n(x)}{\partial x^4} \frac{\partial T_n(t)}{\partial t} + P_0 \frac{\partial^2 w_n(x)}{\partial x^2} T_n(t) + S \cos vt \frac{\partial^2 w_n(x)}{\partial x^2} T_n(t) + w_n(x) \varrho A \frac{\partial^2 T_n(t)}{\partial t^2} + w_n(x) C_E \frac{\partial T_n(t)}{\partial t} \right) = 0$$

Równanie (3.40) przemnożone przez m -tą funkcję własną $w_m(x)$ przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(JE \frac{\partial^4 w_n(x)}{\partial x^4} w_m(x) + P_0 \frac{\partial^2 w_n(x)}{\partial x^2} w_m(x) \right) T_n(t) + JE^* \frac{\partial^4 w_n(x)}{\partial x^4} w_m(x) \frac{\partial T_n(t)}{\partial t} + S \cos vt \frac{\partial^2 w_n(x)}{\partial x^2} w_m(x) T_n(t) + w_n(x) w_m(x) \varrho A \frac{\partial^2 T_n(t)}{\partial t^2} + w_n(x) w_m(x) C_E \frac{\partial T_n(t)}{\partial t} \right) = 0$$

Przemnożone przez funkcje $w_m(x)$ równanie (3.17) po rozdzieleniu zmiennych dla m -tej funkcji własnej przyjmuje postać

$$JE \frac{\partial^4 w_n(x)}{\partial x^4} w_m(x) + P_0 \frac{\partial^2 w_n(x)}{\partial x^2} w_m(x) = (\varrho A \omega^2 - j\omega C_E) w_n(x) w_m(x) - j\omega J E^* \frac{\partial^4 w_n(x)}{\partial x^4} w_m(x)$$

Podstawiając (3.42) do (3.41) otrzymano

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left((\varrho A \omega^2 - j\omega C_E) w_n(x) w_m(x) - j\omega J E^* \frac{\partial^4 w_n(x)}{\partial x^4} w_m(x) + S \cos vt \frac{\partial^2 w_n(x)}{\partial x^2} w_m(x) \right) T_n(t) + \left(J E^* \frac{\partial^4 w_n(x)}{\partial x^4} w_m(x) + w_n(x) w_m(x) C_E \right) \frac{\partial T_n(t)}{\partial t} + \varrho A w_n(x) w_m(x) \frac{\partial^2 T_n(t)}{\partial t^2} \right) = 0$$

Istotne znaczenie, co pokazano w pracy [177], ma w równaniu (3.43) jedynie pierwszy wyraz sumy. W pracy analizowany jest rezonans parametryczny dla pierwszej (podstawowej) częstości drgań układu $n = 1$ (w dalszych rozważaniach pominięto dolny indeks dla częstości podstawowej), co przy uwzględnieniu warunku ortogonalności (3.38) pozwala przekształcić równanie (3.43) do postaci

$$T(t) \left((\varrho A \omega^2 - j\omega C_E) \int_0^l w^2(x) dx - j\omega J E^* \int_0^l \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} w(x) dx + S \cos vt \int_0^l \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} w(x) dx \right) + \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \varrho A \int_0^l w^2(x) dx + \frac{\partial T(t)}{\partial t} \left(J E^* \int_0^l \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} w(x) dx + C_E \int_0^l w^2(x) dx \right) = 0$$

Dzieląc obustronnie równanie (3.44) przez $\varrho A \int_0^l w^2(x) dx$ otrzymano

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \left(\frac{C_E}{\varrho A} + \frac{J E^* \int_0^l \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} w(x) dx}{\varrho A \int_0^l w^2(x) dx} \right) \frac{\partial T(t)}{\partial t} + \left(\omega^2 - \frac{j\omega C_E}{\varrho A} - \frac{j\omega J E^* \int_0^l \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} w(x) dx}{\varrho A \int_0^l w^2(x) dx} + \frac{\int_0^l \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} w(x) dx}{\varrho A \int_0^l w^2(x) dx} S \cos vt \right) T(t) = 0$$

Podstawiając $\tau = vt$ do równania (3.45) otrzymano

$$\frac{\partial^2 T(\tau)}{\partial \tau^2} + \left(\frac{C_E}{\varrho A v^2} + \frac{J E^* \int_0^l \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} w(x) dx}{\varrho A v^2 \int_0^l w^2(x) dx} \right) \frac{\partial T(\tau)}{\partial \tau} + \left(\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{j \omega C_E}{\varrho A v^2} - \frac{j \omega J E^* \int_0^l \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} w(x) dx}{\varrho A v^2 \int_0^l w^2(x) dx} + \frac{\int_0^l \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} w(x) dx}{\varrho A \int_0^l w^2(x) dx} \frac{S}{v^2} \cos \tau \right) T(\tau) = 0$$

Wyznaczone równanie (3.46) ma formę równania Mathieu, w którym uwzględniono tłumienie drgań i można je przedstawić za [178] jako

$$\frac{\partial^2 T(\tau)}{\partial \tau^2} + c \frac{\partial T(\tau)}{\partial \tau} + (\delta + \epsilon \cos \tau) T(\tau) = 0$$

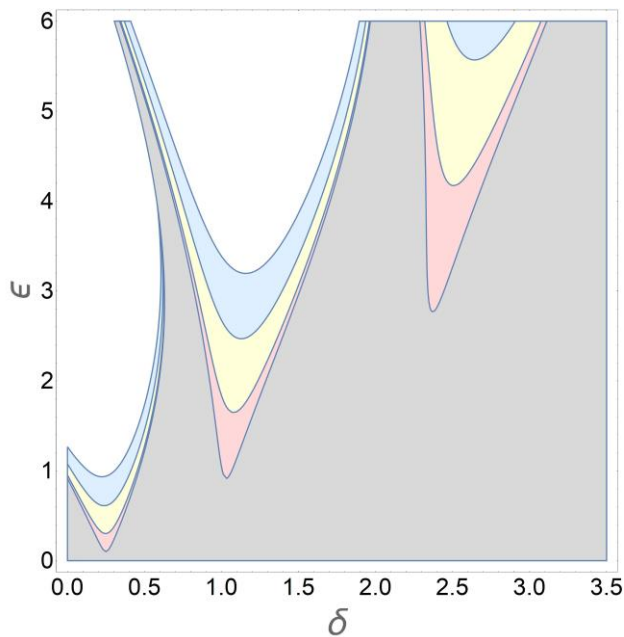
gdzie

$$c = \frac{C_E}{\varrho A v^2} + \frac{J E^* \int_0^l \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} w(x) dx}{\varrho A v^2 \int_0^l w^2(x) dx}$$

$$\delta = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{j \omega C_E}{\varrho A v^2} - \frac{j \omega J E^* \int_0^l \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} w(x) dx}{\varrho A v^2 \int_0^l w^2(x) dx}$$

$$\epsilon = \frac{S \int_0^l \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} w(x) dx}{v^2 \varrho A \int_0^l w^2(x) dx}$$

Rozwiązanie równania (3.47) prowadzi do wyznaczenia statecznych i niestatecznych rozwiązań układu, w którym uwzględniono tłumienie drgań (rys. 3.2). Obszary rozwiązań niestatecznych na Karcie Strutta zawężają się wraz ze wzrostem tłumienia w badanym układzie.



Rys. 3.2. Wpływ tłumienia na zwiększenie obszarów rozwiązań statecznych równania Mathieu (Karta Strutta) dla $c = 0,1$ (szary), $c = 0,3$ (czerwony), $c = 0,6$ (żółty) oraz $c = 0,9$ (niebieski).

Na rys. 3.2 przedstawiono wpływ współczynnika c na zakres rozwiązań statecznych z równania Mathieu (3.47). Dla wartości $c = 0,1$ obszar rozwiązań statecznych oznaczono kolorem szarym. Zwiększenie współczynnika c do wartości 0,3 zwiększa obszar, dla którego rozwiązania równania są stateczne. Dalsze zwiększanie wartości parametru c do wartości 0,6 i 0,9 zmniejsza zakres rozwiązań niestatecznych o obszary zaznaczone na rys. 3.2 kolorami żółtym i niebieskim.

Równanie Mathieu dla układu bez tłumienia można przedstawić w postaci

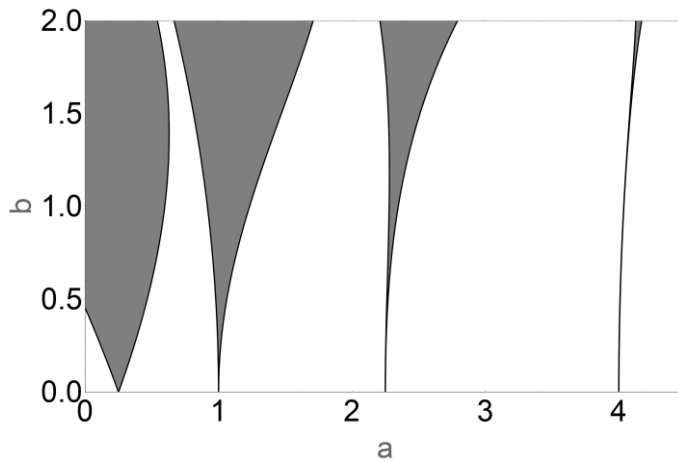
$$\frac{\partial^2 T(\tau)}{\partial \tau^2} + (a + b \cos \tau)T(\tau) = 0$$

gdzie

$$a = \frac{\omega^2}{v^2}$$

$$b = \frac{\int_0^l \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} w(x) dx}{-qA \int_0^l w^2(x) dx} \frac{s}{v^2}$$

Rozwiązanie równania (3.51) jest znane i można je również przedstawić w postaci karty Strutta (rys. 3.3).



Rys. 3.3. Karta Strutta – kolorem białym zaznaczono rozwiązania stabilne, a szarym niestabilne rozwiązania równania Mathieu.

Wartości liczbowe parametrów a i b decydują każdorazowo czy rozwiązanie leży w obszarze statecznych czy niestatecznych rozwiązań na Karcie Strutta.

3.4 Wyznaczenie krzywych przejścia dla pierwszego obszaru niestatecznego metodą perturbacyjną

Przykładowy sposób wyznaczenia krzywych przejścia (Rys. 3.2 i 3.3) dla pierwszego obszaru niestatecznego przedstawiono za pomocą metody małego parametru. W celu określenia wpływu tłumienia na krzywe przejścia w równaniu Mathieu (3.47) wykorzystano metodę rozwinięcia dwóch zmiennych [179], [180], [181] (two variable expansion method). Aby zastosować metodę perturbacji współczynnik tłumienia c przeskalowano do $O(\epsilon)$ poprzez

$$c = \epsilon \mu$$

skąd

$$\mu = \frac{c}{\epsilon} = \left(\frac{C_E}{\varrho A v^2} + \frac{J E^* \int_0^l \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} W(x) dx}{\varrho A v^2 \int_0^l W^2(x) dx} \right) \frac{\varrho A v^2 \int_0^l W^2(x) dx}{S \int_0^l \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} W(x) dx}$$

Zakładając małe wartości ϵ podstawiono $\xi = \tau$ oraz $\eta = \epsilon \tau$ oraz (3.54) do (3.47) i otrzymano

$$\frac{\partial^2 T(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 T(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 T(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + \epsilon \mu \left(\frac{\partial T(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial T(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) + (\delta + \epsilon \cos \xi) T(\xi, \eta) = 0$$

Następnie rozwinięto funkcję $T(\xi, \eta)$ i współczynnik δ w szeregi potęgowe poprzez

$$T(\xi, \eta) = T_0(\xi, \eta) + \epsilon T_1(\xi, \eta) + \dots$$

oraz

$$\delta = \delta_0 + \epsilon \delta_1 + \dots$$

Podstawiając (3.57) do (3.56) i pomijając czynnik $O(\epsilon^2)$ otrzymano

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 (T_0(\xi, \eta) + \epsilon T_1(\xi, \eta))}{\partial \xi^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 (T_0(\xi, \eta) + \epsilon T_1(\xi, \eta))}{\partial \xi \partial \eta} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 (T_0(\xi, \eta) + \epsilon T_1(\xi, \eta))}{\partial \eta^2} + \\ & \epsilon \mu \left(\frac{\partial (T_0(\xi, \eta) + \epsilon T_1(\xi, \eta))}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial (T_0(\xi, \eta) + \epsilon T_1(\xi, \eta))}{\partial \eta} \right) + (\delta_0 + \epsilon \delta_1 + \epsilon \cos \xi) (T_0(\xi, \eta) + \epsilon T_1(\xi, \eta)) = \\ & 0 \end{aligned}$$

Przekształcając otrzymano

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 T_0(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \epsilon \frac{\partial^2 T_1(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 T_0(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + 2\epsilon^2 \frac{\partial^2 T_1(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 T_0(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + \epsilon^3 \frac{\partial^2 T_1(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + \\ & \epsilon \mu \frac{\partial T_0(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \epsilon^2 \mu \frac{\partial T_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \epsilon^2 \mu \frac{\partial T_0(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \epsilon^3 \mu \frac{\partial T_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \delta T_0(\xi, \eta) + \epsilon T_0(\xi, \eta) \cos \xi + \\ & \delta \epsilon T_1(\xi, \eta) + \epsilon^2 T_1(\xi, \eta) \cos \xi = 0 \end{aligned}$$

Porządkując wyrazy względem tej samej potęgi czynnika ϵ otrzymano

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 T_0(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \delta T_0(\xi, \eta) + \epsilon \left(\frac{\partial^2 T_1(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 T_0(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + \mu \frac{\partial T_0(\xi, \eta)}{\partial \xi} + T_0(\xi, \eta) \cos \xi + \right. \\ & \left. \delta T_1(\xi, \eta) \right) + \epsilon^2 \left(2 \frac{\partial^2 T_1(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 T_0(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + \mu \frac{\partial T_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial T_0(\xi, \eta)}{\partial \eta} + T_1(\xi, \eta) \cos \xi \right) + \\ & \epsilon^3 \left(\frac{\partial^2 T_1(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + \mu \frac{\partial T_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) = 0 \end{aligned}$$

Co daje układ równań

$$\frac{\partial^2 T_0(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \delta T_0(\xi, \eta) = 0$$

$$\frac{\partial^2 T_1(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 T_0(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + \mu \frac{\partial T_0(\xi, \eta)}{\partial \xi} + T_0(\xi, \eta) \cos \xi + \delta T_1(\xi, \eta) = 0$$

$$2 \frac{\partial^2 T_1(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 T_0(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + \mu \frac{\partial T_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial T_0(\xi, \eta)}{\partial \eta} + T_1(\xi, \eta) \cos \xi = 0$$

$$\frac{\partial^2 T_1(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + \mu \frac{\partial T_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} = 0$$

Przekształcając (3.63) otrzymano

$$\frac{\partial^2 T_1(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \delta T_1(\xi, \eta) = -2 \frac{\partial^2 T_0(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} - \mu \frac{\partial T_0(\xi, \eta)}{\partial \xi} - T_0(\xi, \eta) \cos \xi$$

Przekształcając (3.64) otrzymano

$$2 \frac{\partial^2 T_1(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + \mu \frac{\partial T_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} + T_1(\xi, \eta) \cos \xi = -\frac{\partial^2 T_0(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} - \mu \frac{\partial T_0(\xi, \eta)}{\partial \eta}$$

Równanie (3.62) jest równaniem ruchu prostego oscylatora harmonicznego i jego rozwiązanie ogólne przyjmuje postać

$$T_0(\xi, \eta) = A(\eta)\cos\sqrt{\delta}\xi + B(\eta)\sin\sqrt{\delta}\xi$$

Warto zauważyć, że amplitudy rozwiązania ogólnego są zależne od η .

Podstawiając (3.68) do (3.66) otrzymano

$$\frac{\partial^2 T_1(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \delta T_1(\xi, \eta) = -2 \left(-\frac{dA(\eta)}{d\eta} \sqrt{\delta} \sin\sqrt{\delta}\xi + \frac{dB(\eta)}{d\eta} \sqrt{\delta} \cos\sqrt{\delta}\xi \right) - \\ \mu(-A(\eta)\sqrt{\delta}\sin\sqrt{\delta}\xi + B(\eta)\sqrt{\delta}\cos\sqrt{\delta}\xi) - A(\eta)\cos\sqrt{\delta}\xi \cos \xi - B(\eta)\sin\sqrt{\delta}\xi \cos \xi$$

Przekształcając otrzymano

$$\frac{\partial^2 T_1(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \delta T_1(\xi, \eta) = 2 \frac{dA(\eta)}{d\eta} \sqrt{\delta} \sin\sqrt{\delta}\xi - 2 \frac{dB(\eta)}{d\eta} \sqrt{\delta} \cos\sqrt{\delta}\xi + \mu A(\eta) \sqrt{\delta} \sin\sqrt{\delta}\xi - \\ \mu B(\eta) \sqrt{\delta} \cos\sqrt{\delta}\xi - A(\eta) \cos\sqrt{\delta}\xi \cos \xi - B(\eta) \sin\sqrt{\delta}\xi \cos \xi$$

Zamieniając iloczyny funkcji trygonometrycznych na sumy otrzymano

$$\frac{\partial^2 T_1(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \delta T_1(\xi, \eta) = 2 \frac{dA(\eta)}{d\eta} \sqrt{\delta} \sin\sqrt{\delta}\xi - 2 \frac{dB(\eta)}{d\eta} \sqrt{\delta} \cos\sqrt{\delta}\xi + \mu A(\eta) \sqrt{\delta} \sin\sqrt{\delta}\xi - \\ \mu B(\eta) \sqrt{\delta} \cos\sqrt{\delta}\xi - \frac{A(\eta)}{2} (\cos(\sqrt{\delta} + 1)\xi + \cos(\sqrt{\delta} - 1)\xi) - \frac{B(\eta)}{2} (\sin(\sqrt{\delta} + 1)\xi - \\ \sin(\sqrt{\delta} - 1)\xi)$$

Pierwsze dwa człony prawej strony równania reprezentują warunki rezonansowe i mogą powodować niestabilność rozwiązania. W przypadku gdy

$$\frac{dA(\eta)}{d\eta} = 0, \quad \frac{dB(\eta)}{d\eta} = 0$$

człon $\frac{A(\eta)}{2}\xi$ występujący przy funkcji cosinus równania (3.71) nie wpływa na rozwiązanie i nie występuje zjawisko rezonansu parametrycznego. W przypadku podstawienia $\delta = \frac{1}{4}$ i $\mu = 0$ (brak tłumienia) do równania (3.71) otrzymano

$$\frac{\partial^2 T_1(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{4} T_1(\xi, \eta) = \frac{dA(\eta)}{d\eta} \sin \frac{\xi}{2} - \frac{dB(\eta)}{d\eta} \cos \frac{\xi}{2} - \frac{A(\eta)}{2} \left(\cos \frac{3\xi}{2} + \cos \frac{\xi}{2} \right) - \frac{B(\eta)}{2} \left(\sin \frac{3\xi}{2} - \sin \frac{\xi}{2} \right)$$

Przekształcając otrzymano

$$\frac{\partial^2 T_1(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{4} T_1(\xi, \eta) = \frac{dA(\eta)}{d\eta} \sin \frac{\xi}{2} - \frac{dB(\eta)}{d\eta} \cos \frac{\xi}{2} - \frac{A(\eta)}{2} \cos \frac{3\xi}{2} - \frac{A(\eta)}{2} \cos \frac{\xi}{2} - \frac{B(\eta)}{2} \sin \frac{3\xi}{2} + \frac{B(\eta)}{2} \sin \frac{\xi}{2}$$

$$\frac{\partial^2 T_1(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{4} T_1(\xi, \eta) = \left(\frac{dA(\eta)}{d\eta} + \frac{B(\eta)}{2} \right) \sin \frac{\xi}{2} - \left(\frac{dB(\eta)}{d\eta} + \frac{A(\eta)}{2} \right) \cos \frac{\xi}{2} - \frac{A(\eta)}{2} \cos \frac{3\xi}{2} - \frac{B(\eta)}{2} \sin \frac{3\xi}{2}$$

co pozwoliło na otrzymanie dodatkowych warunków rezonansowych określonych jako

$$\frac{dA(\eta)}{d\eta} = -\frac{B(\eta)}{2}, \quad \frac{dB(\eta)}{d\eta} = -\frac{A(\eta)}{2} \Rightarrow \frac{d^2 A(\eta)}{d\eta^2} = \frac{A(\eta)}{4}$$

Wartość parametru $\delta = \frac{1}{4}$ powoduje niestabilność, a $A(\eta)$ i $B(\eta)$ rosną wykładniczo. W przedstawionym przykładzie dochodzi do rezonansu subharmonicznego, w którym częstotliwość wymuszenia jest dwukrotnością częstotliwości własnej.

Po wstawieniu rozwinięcia w szereg potęgowy δ względem ϵ z równania (3.58) do równania (3.66) oraz dla $\mu = 0$ (brak tłumienia) otrzymano

$$\frac{\partial^2 T_1(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{4} T_1(\xi, \eta) = -2 \frac{\partial^2 T_0(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} - \delta_1 T_0(\xi, \eta) - T_0(\xi, \eta) \cos \xi$$

Warunki rezonansowe dla równania (3.77) przyjmują postać

$$\frac{dA(\eta)}{d\eta} = \left(\delta_1 - \frac{1}{2}\right) B(\eta), \quad \frac{dB(\eta)}{d\eta} = -\left(\delta_1 + \frac{1}{2}\right) A(\eta) \Rightarrow \frac{d^2 A(\eta)}{d\eta^2} + \left(\delta_1 + \frac{1}{4}\right) A(\eta) = 0$$

Warunki (3.78) spełniają funkcje sinus i cosinus odpowiednio dla $A(\eta)$ i $B(\eta)$ przy $\delta_1^2 - \frac{1}{4} > 0$, czyli gdy $\delta_1 > \frac{1}{2}$ lub $\delta_1 < -\frac{1}{2}$. Przedstawione krzywe reprezentują krzywe stabilności w przestrzeni δ - ϵ jako

$$\delta = \frac{1}{4} \pm \frac{\epsilon}{2} + O(\epsilon^2)$$

Równania (3.68) i (3.79) odpowiadają obszarowi niestabilności z miejscem zerowym w $\delta = \frac{1}{4}$.

W przypadku układu tłumionego $\mu \neq 0$ równanie (3.77) przyjmuje postać

$$\frac{\partial^2 T_1(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{4} T_1(\xi, \eta) = -2 \frac{\partial^2 T_0(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} - \mu \frac{\partial T_0(\xi, \eta)}{\partial \xi} - \delta_1 T_0(\xi, \eta) - T_0(\xi, \eta) \cos \xi$$

Odpowiednie pochodne $\frac{dA(\eta)}{d\eta}$ i $\frac{dB(\eta)}{d\eta}$ przyjmują postać

$$\frac{dA(\eta)}{d\eta} = -\frac{\mu}{2} A(\eta) + \left(\delta_1 - \frac{1}{2}\right) B(\eta), \quad \frac{dB(\eta)}{d\eta} = -\left(\delta_1 + \frac{1}{2}\right) A(\eta) - \frac{\mu}{2} B(\eta)$$

Układ równań (3.81) można rozwiązać przyjmując za rozwiązania

$$A(\eta) = A_0 e^{\lambda \eta}, \quad B(\eta) = B_0 e^{\lambda \eta}$$

Nietrywialne rozwiązanie otrzymuje się dla

$$\begin{vmatrix} -\frac{\mu}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} + \delta_1 \\ -\frac{1}{2} + \delta_1 & -\frac{\mu}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

z czego wynika, że

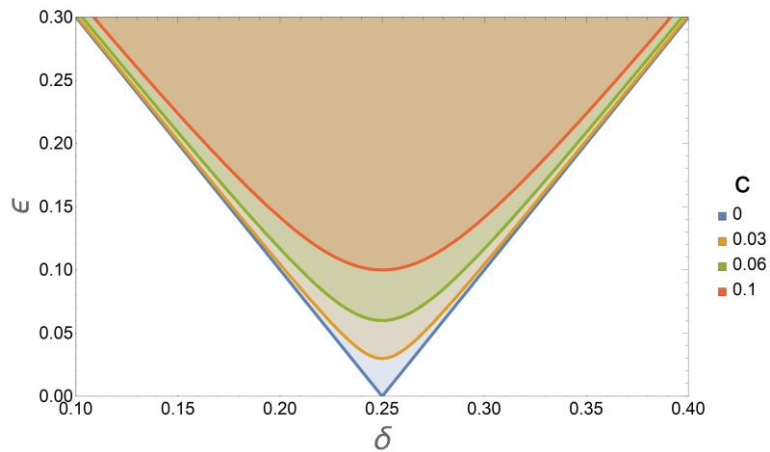
$$\lambda = -\frac{\mu}{2} \pm \sqrt{-\delta_1^2 + \frac{1}{4}}$$

Dla wyznaczenia przejścia między stanem stabilnym i niestabilnym należy przyjąć $\lambda = 0$ i wyznaczyć wartość δ_1

$$\delta_1 = \pm \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{2}$$

Dla pierwszego obszaru stabilności wyznaczono relację

$$\delta = \frac{1}{4} \pm \epsilon \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{2} + O(\epsilon^2) = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{\epsilon^2 - c^2}}{2} + O(\epsilon^2)$$



Rys. 3.4. Wpływ tłumienia wiskotycznego c na obszar niestateczny (zaczieniony) rozwiązania równania Mathieu.

Korzystając z relacji (3.86) przedstawiono na rys. 3.4 wpływ współczynnika tłumienia c na pierwszy obszar niestateczny równania Mathieu. Wraz ze wzrostem

wartości współczynnika tłumienia zmniejszała się powierzchnia obszaru niestabilnych rozwiązań równania. Minimum wartości współczynnika ϵ zwiększało swoją wartość wraz ze wzrostem współczynnika tłumienia c i powstawał coraz większy obszar możliwych rozwiązań statecznych pod krzywą przejścia dzielącą obszary stateczne i niestateczne.

3.5 Przykładowe wyniki badań stateczności dynamicznej prostej belki

3.5.1 Badania wpływu rodzaju materiału na stateczność dynamiczną belki bez uwzględnienia tłumienia

Jako przykład rozwiązania stateczności dynamicznej prostego układu nietłumionego (belki Bernoulliego-Eulera) wybrano belki wykonane z różnych materiałów. Przyjęto długość belki równą $l = 3 \text{ m}$ oraz kwadratowy przekrój poprzeczny o polu powierzchni $A = 0,09 \text{ m}^2$. Przyjęto wartość krytycznej osiowej siły ściskającej dla belki wykonanej ze stali równą $P_c = 9,32676 \cdot 10^7 \text{ N}$, stała składowa obciążenia wynosiła $P_0 = 5\%P_c$, podobnie zmienna składowa obciążenia wynosiła $S = 5\%P_c$. Moment bezwładności przekroju wynosił $J = 675 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$. Własności materiałowe belek dla różnych materiałów użytych w symulacji podano w tabeli 3.1.

Tabela 3.1 Własności materiałów wykorzystanych do analizy stateczności dynamicznej belek Bernoulliego-Eulera[182].

Materiał	Moduł Younga $E \text{ [GPa]}$	Gęstość materiału $\rho \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$
Stal	210	7860
Miedź	125	8900

Aluminium	70	2700
Tytan	116	4500

W celu znalezienia, pierwszych trzech częstości drgań własnych rozwiązania ogólnego równania przemieszczeń opisanego wzorem (3.22) wyznaczono układ równań, podstawiając równanie (3.22) i jego odpowiednie pochodne do warunków brzegowych (3.19), (3.20) i (3.21), dla $E^* = 0$ i $C_R = 0$, który przekształcono do postaci macierzowej. Macierz $[A](\omega)$ przyjęła postać

$$[A](\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh(\alpha l) & \sinh(\alpha l) & \cos(\beta l) & \sin(\beta l) \\ EJ\alpha^2 & 0 & -EJ\beta^2 & 0 \\ EJ\alpha^2 \cosh(\alpha l) & EJ\alpha^2 \sinh(\alpha l) & -EJ\beta^2 \cos(\beta l) & -EJ\beta^2 \sin(\beta l) \end{bmatrix}.$$

Korzystając z równań (3.87) i (3.26) wyznaczono wartości trzech pierwszych częstości drgań analizowanych belek i przedstawiono je w tabeli 3.2.

Tabela 3.2 Wyznaczone częstości drgań belek.

Materiał	$Re(\omega_1)$	$Re(\omega_2)$	$Re(\omega_3)$
Stal	483,473	1956,19	4410,66
Miedź	346,831	1414,67	3194,26
Aluminium	461,292	1912,38	4330,27

Tytan	468,905	1915,59	4326,52
-------	---------	---------	---------

W celu wyznaczenia funkcji własnych belki dla wyznaczonych częstości drgań zastosowano normalizację stałych równania przemieszczeń (3.87) do wartości stałej $C_1 = 1$ przekształcając równanie macierzowe (3.87) do postaci

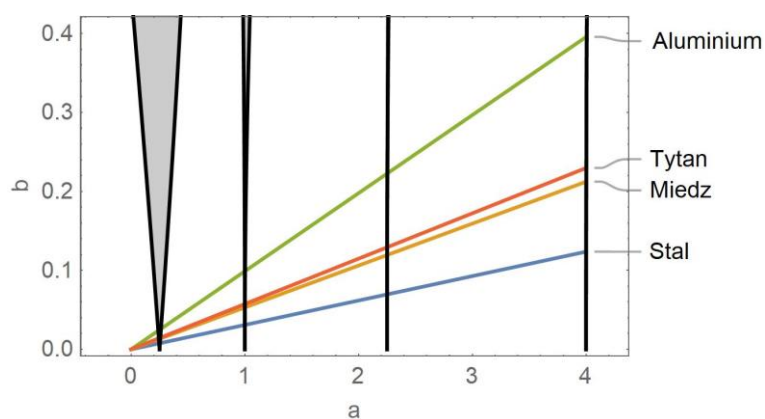
$$\begin{bmatrix} \sinh(\alpha l) & \cos(\beta l) & \sin(\beta l) \\ 0 & -E J \beta^2 & 0 \\ E J \alpha^2 \sinh(\alpha l) & -E J \beta^2 \cos(\beta l) & -E J \beta^2 \sin(\beta l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cosh(\alpha l) \\ -E J \alpha^2 \\ -E J \alpha^2 \cosh(\alpha l) \end{bmatrix}$$

co po dalszym przekształceniu daje

$$\begin{bmatrix} C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sinh(\alpha l) & \cos(\beta l) & \sin(\beta l) \\ 0 & -E J \beta^2 & 0 \\ E J \alpha^2 \sinh(\alpha l) & -E J \beta^2 \cos(\beta l) & -E J \beta^2 \sin(\beta l) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\cosh(\alpha l) \\ -E J \alpha^2 \\ -E J \alpha^2 \cosh(\alpha l) \end{bmatrix}$$

Na podstawie równania (3.89) wyznaczono wartości parametrów C_i .

Dla danych materiałów określono parametry a i b równania Mathieu z równań (3.52) i (3.53) i naniesiono na kartę Strutta (rysunek 3.5).



Rys. 3.5. Relacje między współczynnikami a i b dla analizowanych materiałów naniesione na kartę Strutta.

Jak można zauważyć na rysunku 3.5 rozwiązaniami najmniej stabilnymi przy tych samych wymiarach geometrycznych i obciążeniu charakteryzowała się belka wykonana z aluminium (rozwiązania w postaci linii prostej na dłuższych odcinkach leżą w obszarach niestatecznych rozwiązań). Belki wykonane z tytanu i miedzi mimo dużych różnic w częstościach własnych charakteryzowały się zbliżoną statecznością dynamiczną na korzyść kolumny wykonanej z miedzi. Natomiast najbardziej stabilne rozwiązania uzyskano dla kolumny wykonanej ze stali.

3.5.2 Badanie wpływu tłumienia na stateczność dynamiczną belki Bernoulliego-Eulera

3.5.2.1 Określenie bezwymiarowych współczynników tłumienia

W celu analizy wpływu różnych rodzajów tłumienia na stateczność dynamiczną analizowanej belki wprowadzono bezwymiarowe współczynniki tłumienia w postaci:

$$\text{dla tłumienia wewnętrznego } H = \frac{E^*}{E \sqrt{l^4 \frac{\rho A}{EJ}}}$$

$$\text{dla tłumienia zewnętrznego } N = \frac{C_E l^2}{\sqrt{\rho A E J}}$$

$$\text{dla tłumienia konstrukcyjnego } M = \frac{C_R}{l \sqrt{\rho A E J}}$$

Na podstawie przeprowadzonych badań w pracach [183], [184], [185], [186] bezwymiarowy współczynnik tłumienia wewnętrznego dla jednorodnych stali konstrukcyjnych zawiera się w przedziale $0,001 < H < 0,002$. Do obliczeń przyjęto

wartość $H = 0,001$, a ponadto w celu wykazania zmian wpływu tłumienia wewnętrznego na stateczność układu przeprowadzono badania dla zakresu $0 < H < 0,004$.

Gęstość i właściwości reologiczne ośrodka wpływają na drgania rozpatrywanego układu. Przykładowo słodka woda stojąca o gęstości $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ma współczynnik tłumienia $C_E = 1,0041 \cdot 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$, co odpowiada $N = 0,2854 \cdot 10^{-7}$ [184], [185]. Do badania wpływu ośrodka na drgania układu przyjęte zostały bezwymiarowe wartości współczynnika tłumienia zewnętrznego w zakresie $0 < N < 1000$.

Bezwymiarowy współczynnik wiskotycznego tłumienia konstrukcyjnego w podporach przegubowych belki przyjmuje wartość $M = 0$ przy braku tłumienia w podporach, a gdy $M \rightarrow \infty$ podpora zmienia swój charakter, z uwagi na blokowanie ruchu obrotowego, z mocowania przegubowego na sztywne. Na podstawie prac [68], [98], [110], [111], [114], [115], [124], [187], [188], [189], [190] określono optymalną wartość współczynnika tłumienia równą $M = 0,4$.

3.5.2.2 Wpływ tłumienia na stateczność dynamiczną belki

W celu zbadania wpływu tłumienia na stateczność dynamiczną belki, rozwiązano zagadnienie stateczności dynamicznej prostej belki Bernoulliego-Eulera przedstawionej na rys. 3.1. Parametry geometryczne i materiałowe belek były zgodne z użytymi w podrozdziale 3.5.1.

Otrzymane rozwiązanie ogólne (3.73) i jego odpowiednie pochodne podstawiono do warunków brzegowych (3.69)–(3.72) i otrzymano układ równań $[A](\omega)$, który po podstawieniu $J^* = J(E + j\omega E^*)$ oraz $C_R^* = j\omega C_R$ można przedstawić jako

$$[A](\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh(\alpha_d l) & \sinh(\alpha_d l) & \cos(\beta_d l) & \sin(\beta_d l) \\ J^* \alpha_d^2 & -\alpha_d C_R^* & -J^* \beta_d^2 & -\beta_d C_R^* \\ \left(\alpha_d C_R^* \sinh(\alpha_d l) + \right. & \left(\alpha_d C_R^* \cosh(\alpha_d l) + \right. & \left(-\beta_d C_R^* \sin(\beta_d l) + \right. & \left. \beta_d C_R^* \cos(\beta_d l) + \right) \\ \left. + J^* \alpha_d^2 \cosh(\alpha_d l) \right) & \left. + J^* \alpha_d^2 \sinh(\alpha_d l) \right) & \left. - J^* \beta_d^2 \cos(\beta_d l) \right) & \left. - J^* \beta_d^2 \sin(\beta_d l) \right) \end{bmatrix}.$$

Korzystając z równań (3.93) i (3.26) wyznaczono trzy pierwsze wartości własne analizowanych belek dla wybranych wartości tłumienia i przedstawiono je w tabeli 3.3.

Tabela 3.3 Wyznaczone wartości własne belek wykonanych ze stali konstrukcyjnej dla wybranych przypadków tłumienia.

Przypadek	1	2	3	4	5
H	0	0	0	0,001	0
N	0	0	18.5	0	4.26
M	0	0,05	0	0	0,017
ω_1	483,473 + 0 j	483.26 + 49.454 j	150.569 + 459.429 j	483.467 + 2.42246 j	467.957 + 122.511 j
ω_2	1956,19 + 0 j	1973.03 + 198.266 j	1901.48 + 459.429 j	1955.81 + 38.7593 j	1951.55 + 171.862 j
ω_3	4410,66 + 0 j	4486.25 + 443.051 j	4386.67 + 459.429 j	4406.29 + 196.219 j	4413.77 + 253.874 j
c	0	0	0.007921 + 0.0058168 j	5.18155*10 ⁻⁶ - 5.19266*10 ⁻⁸ j	0.00888691 - 0.00011101 j

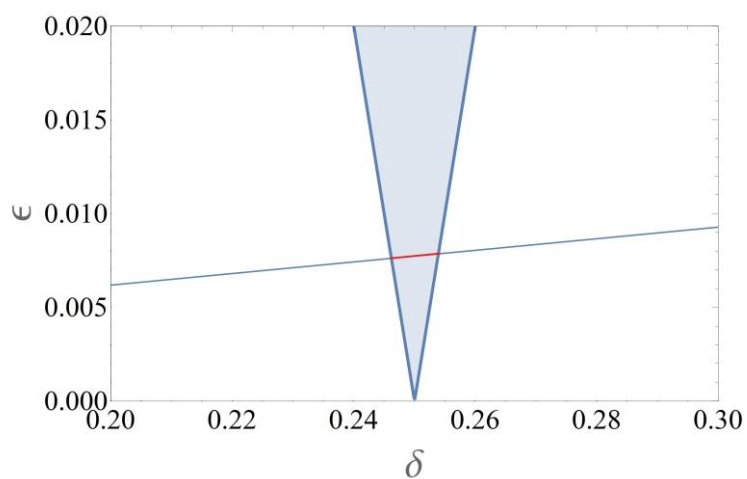
δ	0.25	0.25	0.201505 - 0.147972 j	0.249987 - 0.002505 j	0.222245 - 0.106016 j
ϵ	0.00773194	0.0012142 + 0.0100347 j	0.0062321 - 0.0045765 j	0.00773156 - 0.00007748 j	0.0076227 - 0.00036487 j

W celu wyznaczenia funkcji własnych obliczono stałe całkowania w rozwiązaniu (3.22). Przyjmując normalizację do stałej $C_1 = 1$ równania (3.69)–(3.72) po uwzględnieniu (3.22) przekształcono do postaci

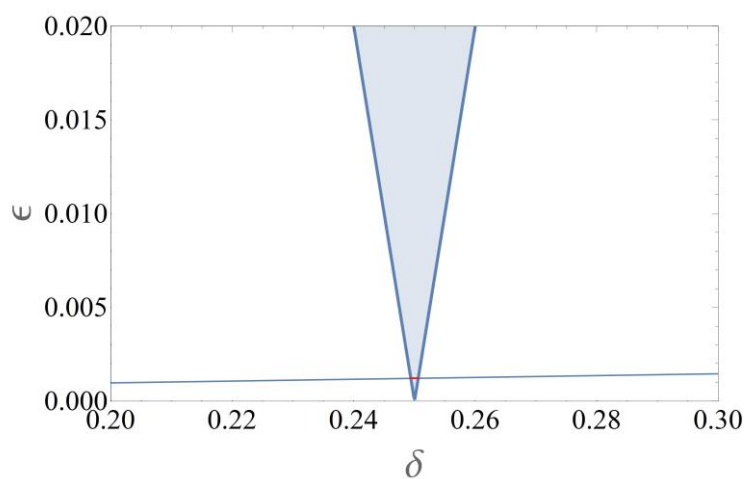
$$\begin{bmatrix} C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sinh(\alpha_d l) & \cos(\beta_d l) & \sin(\beta_d l) \\ -\alpha_d C_R^* & -J^* \beta_d^2 & -\beta_d C_R^* \\ (\alpha_d C_R^* \cosh(\alpha_d l) +) & (-\beta_d C_R^* \sin(\beta_d l) +) & (\beta_d C_R^* \cos(\beta_d l) +) \\ (+J^* \alpha_d^2 \sinh(\alpha_d l)) & (-J^* \beta_d^2 \cos(\beta_d l)) & (-J^* \beta_d^2 \sin(\beta_d l)) \end{bmatrix}^{-1}.$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -\cosh(\alpha_d l) \\ -J^* \alpha_d^2 \\ -(\alpha_d C_R^* \sinh(\alpha_d l) +) \\ (+J^* \alpha_d^2 \cosh(\alpha_d l)) \end{bmatrix}$$

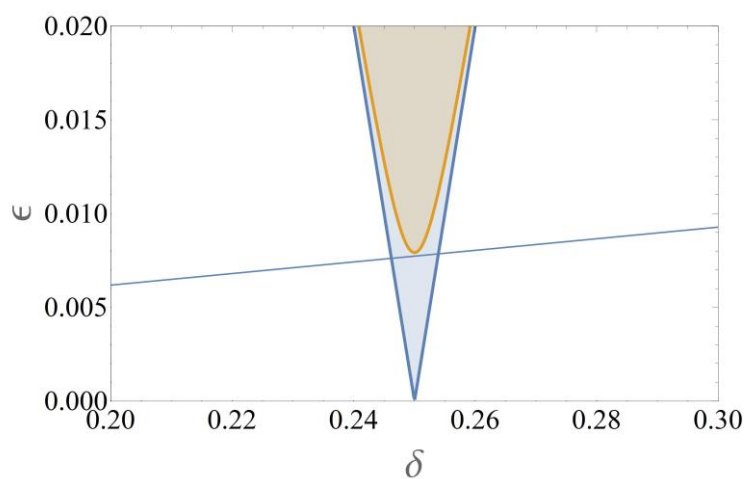
Korzystając z równania (3.94) wyznaczono wartości stałych C_2 , C_3 i C_4 , co po wstawieniu do równania (3.22) wraz z wyznaczonymi wartościami własnymi pozwoliło na określenie funkcji własnych analizowanych przypadków. Otrzymane funkcje własne z kolei umożliwiły wyznaczenie parametrów δ i ϵ tłumionego równania Mathieu.



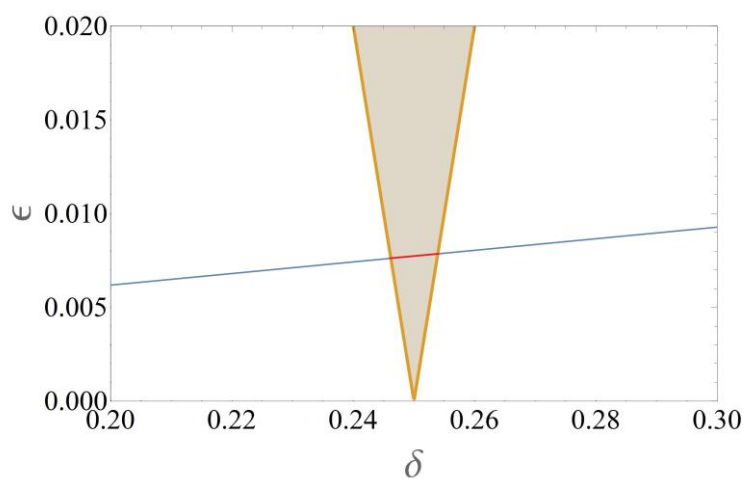
Rys. 3.6. Relacja między parametrami δ i ϵ naniesiona na kartę Strutta; brak tłumienia (przypadek 1 w tabeli 3.3).



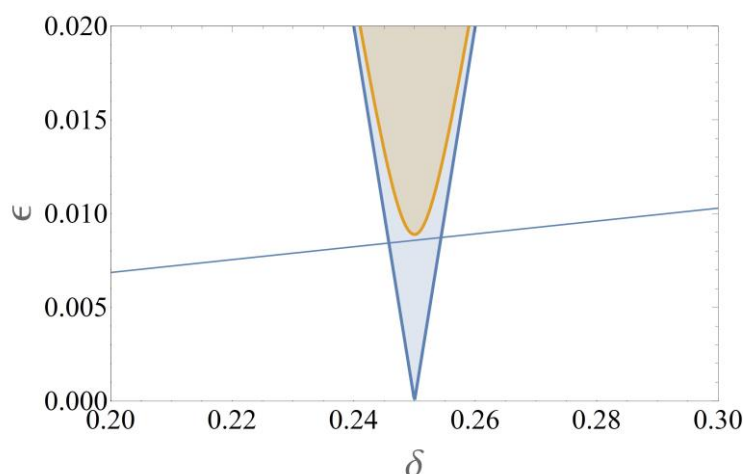
Rys. 3.7. Relacja między parametrami δ i ϵ naniesiona na kartę Strutta; uwzględnione tłumienie w podporach belki dla $M = 0,05$ (przypadek 2 w tabeli 3.3).



Rys. 3.8. Relacja między parametrami δ i ϵ naniesiona na kartę Strutta; uwzględnione tłumienie ośrodka dla $N = 18,5$ (przypadek 3 w tabeli 3.3).



Rys. 3.9. Relacja między parametrami δ i ϵ naniesiona na kartę Strutta; uwzględnione tłumienie wewnętrzne dla $H = 0,001$ (przypadek 4 w tabeli 3.3).



Rys. 3.10. Relacja między parametrami δ i ϵ naniesiona na kartę Strutta; uwzględnione tłumienie ośrodka dla $N = 4,26$ oraz tłumienie w podporach belki dla $M = 0,017$ (przypadek 5 w tabeli 3.3).

3.5.2.3 Podsumowanie

W niniejszym podrozdziale przeprowadzono badania wpływu różnych rodzajów tłumienia na stateczność dynamiczną stalowej jednorodnej belki Bernoulliego-Eulera przegubowo podpartej na końcach i obciążonej zmienną siłą osiową (rys. 3.1). Wartości współczynników tłumienia (N , M i H), częstości własne ω_i (dla układu bez tłumienia) i wartości własne (dla belki z tłumieniem drgań), współczynnik tłumienia c wpływający na kształt krzywej przejścia między obszarami statecznymi i niestatecznymi rozwiązania równania Mathieu oraz współczynnik ϵ dla pierwszego obszaru niestateczności układu $\epsilon - \delta$ zostały przedstawione w tabeli 3.3. Relacje między parametrami δ i ϵ naniesione na kartę Strutta dla analizowanych przypadków zaprezentowano na rysunkach 3.6–3.10. Przypadek dla układu bez tłumienia przedstawiono na rys. 3.6. Obszar, dla którego rozwiązanie równania Mathieu ma rozwiązania niestateczne to obszar zacieniowany. Uwzględnienie tłumienia konstrukcyjnego w podporach belki zwiększyło stateczność dynamiczną układu (rys. 3.7). Tłumienie ośrodka zmniejszyło obszar niestateczny (rys. 3.8) i spowodowało, że układ w całym analizowanym zakresie δ miał rozwiązania stateczne. Tłumienie wewnętrzne nie spowodowało znaczących zmian stateczności w stosunku do układu nietłumionego (rys. 3.9). Jednoczesne uwzględnienie tłumienia ośrodka i podpór

(rys. 3.10) znacząco wpłynęło na stateczność dynamiczną analizowanego przypadku przenosząc rozwiązania w obszar rozwiązań statecznych w całym badanym zakresie.

4 Układ zmiany wysięgu żurawia samochodowego z uwzględnieniem tłumienia

4.1 Sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia brzegowego

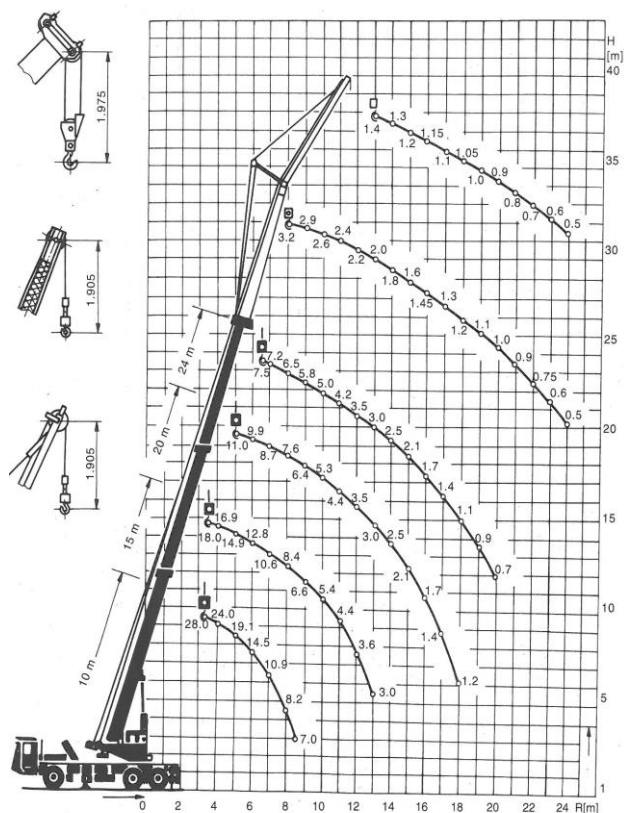
W niniejszym podrozdziale, sformułowano i rozwiązano zagadnienie brzegowe drgań poprzecznych układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego, w płaszczyźnie podnoszenia wysięgnika. W modelu fizycznym uwzględniono dyssypację energii w podporach mocujących do ramy podwozia, siłownik hydrauliczny i wysięgnik teleskopowy. Ponadto uwzględniono tłumienie ośrodka, w którym znajduje się żuraw oraz tłumienie wewnętrzne materiału lepkosprężystego belek Bernoulliego–Eulera modelujących analizowany układ (model reologiczny Kelvina-Voigta). Rozważanym układem był układ zmiany wysięgu żurawia samochodowego DST0285, który został pokazany w wersji transportowej na rys. 4.1 i z podniesionym i rozsuniętym wysięgnikiem na rys. 4.2. Żuraw pozwala na transport ładunków o masie do 28 ton przy masie własnej 28 ton dysponując wysięgnikiem podstawowym o długości 24 m. Żuraw może być doposażony w 8 metrowy wysięgnik pomocniczy co pozwala na transport ładunku na wysokość 34 metry. Na rys. 4.3 oraz 4.4 przedstawiono odpowiednio tablice udźwigów i wysięgu oraz wymiary znamionowe żurawia samochodowego FABLOK DST0285. Rysunek 4.5 przedstawia schemat fizyczny układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego DST0285.



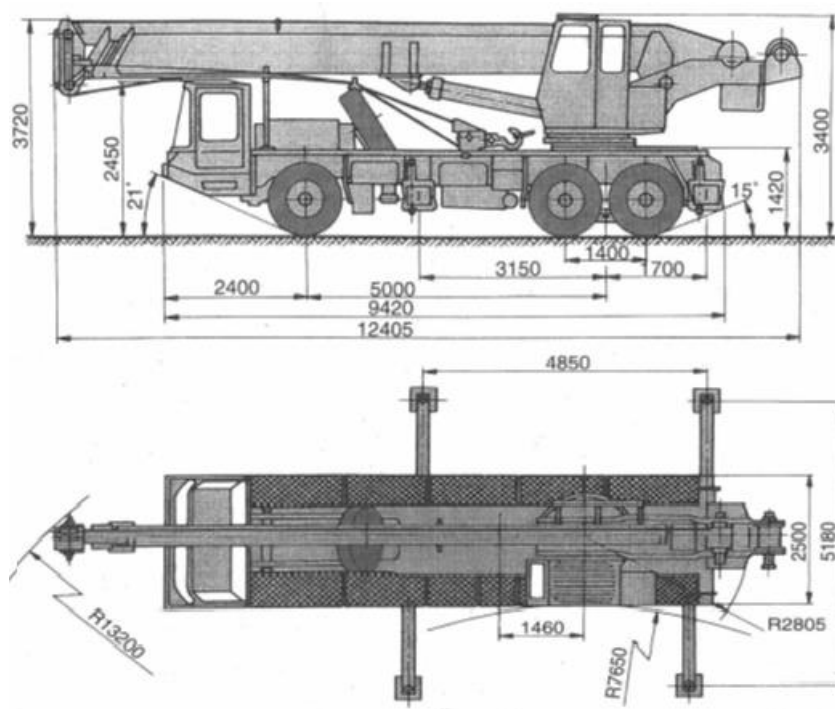
Rys. 4.1. Żuraw samochodowy FABLOK DST0285 [191].



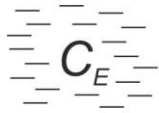
Rys. 4.2. Rozłożony żuraw samochodowy FABLOK DST0285 [192].



Rys. 4.3. Tablica udźwignów i zasięgu żurawia FABLOK DST0285 [193].



Rys. 4.4. Wymiary znamionowe żurawia samochodowego FABLOK DST0285 [193].



DST0285.

snownika zmiłany wysięgu oraz poprzez traktowanie wewnętrznie charakteryzowane

współczynnikami lepkości materiału E_t^* . Poderwanie lub zatrzymanie w czasie opuszczania zawieszonego na linie ładunku o masie m obciąża układ siłą zewnętrzną w postaci

$$P(t) = P_0 + S \cos vt \quad (4.1)$$

gdzie $P_0 = m g$ to część stała obciążenia, natomiast S to część zmienna obciążenia. Odpowiednie siły wzdłużne dla poszczególnych belek przyjmują postać

$$P_6(t) = P_5(t) = (P_0 + S \cos vt) \sin \varphi \quad (4.2)$$

$$P_1(t) = P_3(t) = P_4(t) = (P_0 + S \cos vt) \left(1 + \frac{l_6}{l_5}\right) \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \quad (4.3)$$

Sprężystość układu linowego modelowana jest współczynnikiem sprężystości k_z . Kąty φ i γ określają geometrię układu.

Zagadnienie drgań poprzecznych układu rozwiązano z wykorzystaniem zasady wariacyjnej Hamiltona dla układów niekonserwatywnych [176], którą można przedstawić jako

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_N dt = 0$$

Energia kinetyczna układu T została określona poprzez

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \rho_i A_i \left(\frac{\partial w_i(x_i, t)}{\partial t} \right)^2 dx_i + \frac{1}{2} M_Z \left(\frac{\partial w_6(0, t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial x_Z(t)}{\partial t} \right)^2$$

a jej wariacja po zastosowaniu odpowiednich przekształceń i skorzystaniu z zależności, że $\delta w_i(x_i, t) = 0$ przy $t = t_1$ i $t = t_2$, gdzie n jest liczbą elementów belkowych układu, wynosi

$$\delta T = - \sum_{i=1}^n q_i A_i \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial W_i(x_i, t)}{\partial t} \right) \delta W_i(x_i, t) dt - M_Z \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 W_6(0, t)}{\partial t^2} \delta W_6(0, t) dt - m \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 x_Z(t)}{\partial t^2} \delta x_Z(t) dt$$

Energia potencjalna układu została określona jako

$$V = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} \int_0^{l_i} E_i J_i \left(\frac{\partial^2 W_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} \right)^2 dx_i - \frac{1}{2} P_i(t) \int_0^{l_i} \left(\frac{\partial W_i(x_i, t)}{\partial x_i} \right)^2 dx_i \right] + \frac{1}{2} k_1 (W_6(0, t) \sin \gamma)^2 + k_Z (x_Z(t) - W_6(l_6, t) \cos \varphi)^2$$

Natomiast jej wariacja została określona jako

$$\delta V = \sum_{i=1}^n \left[E_i J_i \frac{\partial^2 W_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} \delta \frac{\partial W_i(x_i, t)}{\partial x_i} \Big|_{x_i=0}^{x_i=l_i} - E_i J_i \frac{\partial^3 W_i(x_i, t)}{\partial x_i^3} \delta W_i(x_i, t) \Big|_{x_i=0}^{x_i=l_i} + E_i J_i \int_0^{l_i} \frac{\partial^4 W_i(x_i, t)}{\partial x_i^4} \delta W_i(x_i, t) dx_i - P_i(t) \frac{\partial W_i(x_i, t)}{\partial x_i} \delta W_i(x_i, t) \Big|_{x_i=0}^{x_i=l_i} + P_i(t) \int_0^{l_i} \frac{\partial^2 W_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} \delta W_i(x_i, t) dx_i \right] + k_1 \sin \gamma W_6(0, t) \delta (W_6(0, t) \sin \gamma) + k_Z (x_Z(t) - W_6(l_6, t) \cos \varphi) (\delta x_Z(t) - \delta W_6(l_6, t) \cos \varphi)$$

Pracę wirtualną sił niezachowawczych wyznaczono jako

$$\delta W_N = \sum_{i=1}^n \left\{ - \int_0^{l_i} E_i^* J_i \frac{\partial^5 W_i(x_i, t)}{\partial x_i^4 \partial t} \delta W_i(x_i, t) dx_i - \int_0^{l_i} C_E \frac{\partial W_i(x_i, t)}{\partial t} \delta W_i(x_i, t) dx_i \right\} + C_{R1} \frac{\partial^2 W_5(0, t)}{\partial x_5 \partial t} \delta \frac{\partial W_5(0, t)}{\partial x_5} - C_{R2} \frac{\partial^2 W_1(0, t)}{\partial x_1 \partial t} \delta \frac{\partial W_1(0, t)}{\partial x_1} - \sum_{i=1}^n \left\{ E_i^* J_i \frac{\partial^3 W_i(x_i, t)}{\partial x_i^2 \partial t} \delta \frac{\partial W_i(x_i, t)}{\partial x_i} \Big|_{x_i=0}^{x_i=l_i} - E_i^* J_i \frac{\partial^4 W_i(x_i, t)}{\partial x_i^3 \partial t} \delta W_i(x_i, t) \Big|_{x_i=0}^{x_i=l_i} \right\}$$

Podstawiając (4.6), (4.8) i (4.9) do równania (4.4) otrzymano

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^{l_i} \left(\sum_{i=1}^n \left\{ -E_i^* J_i \frac{\partial^5 W_i(x_i, t)}{\partial x_i^4 \partial t} - E_i J_i \frac{\partial^4 W_i(x_i, t)}{\partial x_i^4} - P_i(t) \frac{\partial^2 W_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} - Q_i A_i \frac{\partial^2 W_i(x_i, t)}{\partial t^2} - \right. \right. \right. \\ & C_E \frac{\partial W_i(x_i, t)}{\partial t} \left. \left. \right\} \right) \delta W_i(x_i, t) dx_i + \sum_{i=1}^n \left(-E_i J_i \frac{\partial^2 W_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} - E_i^* J_i \frac{\partial^3 W_i(x_i, t)}{\partial x_i^2 \partial t} \right) \delta \frac{\partial W_i(x_i, t)}{\partial x_i} \Big|_{x_i=0}^{x_i=l_i} - \\ & \sum_{i=1}^n \left\{ E_i J_i \frac{\partial^3 W_i(x_i, t)}{\partial x_i^3} + P_i(t) \frac{\partial W_i(x_i, t)}{\partial x_i} + E_i^* J_i \frac{\partial^4 W_i(x_i, t)}{\partial x_i^3 \partial t} \right\} \delta W_i(x_i, t) \Big|_{x_i=0}^{x_i=l_i} - \\ & \left(k_1 (\sin \gamma)^2 W_6(0, t) + M_Z \frac{\partial^2 W_6(0, t)}{\partial t^2} \right) \delta W_6(0, t) + (k_Z(x_Z(t) - \\ & W_6(l_6, t) \cos \varphi)) \cos \varphi \delta W_6(l_6, t) + C_{R1} \frac{\partial^2 W_5(0, t)}{\partial x_5 \partial t} \delta \frac{\partial W_5(0, t)}{\partial x_5} - C_{R2} \frac{\partial^2 W_1(0, t)}{\partial x_1 \partial t} \delta \frac{\partial W_1(0, t)}{\partial x_1} - \\ & \left(m \frac{\partial^2 x_Z(t)}{\partial t^2} + k_Z(x_Z(t) - W_6(l_6, t) \cos \varphi) \right) \delta x_Z(t) \Big) dt = 0 \end{aligned}$$

Z równania (4.10) określono układ różniczkowych równań ruchu drgań poprzecznych modelu jako

$$E_i J_i \frac{\partial^4 W_i(x_i, t)}{\partial x_i^4} + E_i^* J_i \frac{\partial^5 W_i(x_i, t)}{\partial x_i^4 \partial t} + P_i(t) \frac{\partial^2 W_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} + Q_i A_i \frac{\partial^2 W_i(x_i, t)}{\partial t^2} + C_E \frac{\partial W_i(x_i, t)}{\partial t} = 0$$

Dzieląc obie strony przez $E_i J_i$ otrzymano

$$\frac{\partial^4 W_i(x_i, t)}{\partial x_i^4} + \frac{E_i^* J_i}{E_i J_i} \frac{\partial^5 W_i(x_i, t)}{\partial x_i^4 \partial t} + \frac{P_i(t)}{E_i J_i} \frac{\partial^2 W_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} + \frac{Q_i A_i}{E_i J_i} \frac{\partial^2 W_i(x_i, t)}{\partial t^2} + \frac{C_E}{E_i J_i} \frac{\partial W_i(x_i, t)}{\partial t} = 0$$

Na podstawie rys. 4.5 geometryczne warunki brzegowe oraz warunki ciągłości układu są następujące

$$W_1(0, t) = 0$$

$$W_1(l_1, t) = W_2(0, t)$$

$$\frac{\partial W_1(l_1, t)}{\partial x_1} = \frac{\partial W_2(0, t)}{\partial x_2}$$

$$W_2(0, t) = W_3(0, t)$$

$$W_2(l_2, t) = W_3(l_3, t)$$

$$W_3(l_3, t) = W_4(0, t)$$

$$\frac{\partial W_3(l_3, t)}{\partial x_3} = \frac{\partial W_4(0, t)}{\partial x_4}$$

$$W_5(0, t) = 0$$

$$W_5(l_5, t) = W_6(0, t)$$

$$\frac{\partial W_5(l_5, t)}{\partial x_5} = \frac{\partial W_6(0, t)}{\partial x_6}$$

$$W_4(l_4, t) = W_6(0, t) \cos \gamma$$

Uwzględniając w równaniu (4.10) warunki geometryczne i ciągłości wyznaczono naturalne warunki brzegowe w postaci:

$$E_1 J_1 \frac{\partial^2 W_1(0, t)}{\partial x_1^2} + E_1^* J_1 \frac{\partial^3 W_1(0, t)}{\partial x_1^2 \partial t} = -C_{R2} \frac{\partial^2 W_1(0, t)}{\partial x_1 \partial t}$$

$$E_2 J_2 \frac{\partial^2 W_2(l_2, t)}{\partial x_2^2} + E_2^* J_2 \frac{\partial^3 W_2(l_2, t)}{\partial x_2^2 \partial t} = 0$$

$$E_1 J_1 \frac{\partial^2 W_1(l_1, t)}{\partial x_1^2} + E_1^* J_1 \frac{\partial^3 W_1(l_1, t)}{\partial x_1^2 \partial t} = E_2 J_2 \frac{\partial^2 W_2(0, t)}{\partial x_2^2} + E_2^* J_2 \frac{\partial^3 W_2(0, t)}{\partial x_2^2 \partial t}$$

$$E_3 J_3 \frac{\partial^2 W_3(0, t)}{\partial x_3^2} + E_3^* J_3 \frac{\partial^3 W_3(0, t)}{\partial x_3^2 \partial t} = 0$$

$$E_3 J_3 \frac{\partial^2 W_3(l_3, t)}{\partial x_3^2} + E_3^* J_3 \frac{\partial^3 W_3(l_3, t)}{\partial x_3^2 \partial t} = E_4 J_4 \frac{\partial^2 W_4(0, t)}{\partial x_4^2} + E_4^* J_4 \frac{\partial^3 W_4(0, t)}{\partial x_4^2 \partial t}$$

$$E_4 J_4 \frac{\partial^2 W_4(l_4, t)}{\partial x_4^2} + E_4^* J_4 \frac{\partial^3 W_4(l_4, t)}{\partial x_4^2 \partial t} = 0$$

$$E_5 J_5 \frac{\partial^2 W_5(l_5, t)}{\partial x_5^2} + E_5^* J_5 \frac{\partial^3 W_5(l_5, t)}{\partial x_5^2 \partial t} = C_{R1} \frac{\partial^2 W_5(l_5, t)}{\partial x_5 \partial t}$$

$$E_5 J_5 \frac{\partial^2 W_5(l_5, t)}{\partial x_5^2} + E_5^* J_5 \frac{\partial^3 W_5(l_5, t)}{\partial x_5^2 \partial t} = E_6 J_6 \frac{\partial^2 W_6(0, t)}{\partial x_6^2} + E_6^* J_6 \frac{\partial^3 W_6(0, t)}{\partial x_6^2 \partial t}$$

$$E_6 J_6 \frac{\partial^2 W_6(l_6, t)}{\partial x_6^2} + E_6^* J_6 \frac{\partial^3 W_6(l_6, t)}{\partial x_6^2 \partial t} = 0$$

$$E_1 J_1 \frac{\partial^3 W_1(l_1, t)}{\partial x_1^3} + P_1(t) \frac{\partial W_1(l_1, t)}{\partial x_1} + E_1^* J_1 \frac{\partial^4 W_1(l_1, t)}{\partial x_1^3 \partial t} - E_2 J_2 \frac{\partial^3 W_2(0, t)}{\partial x_2^3} - E_2^* J_2 \frac{\partial^4 W_2(0, t)}{\partial x_2^3 \partial t} -$$

$$E_3 J_3 \frac{\partial^3 W_3(0, t)}{\partial x_3^3} - E_3^* J_3 \frac{\partial^4 W_3(0, t)}{\partial x_3^3 \partial t} - P_3(t) \frac{\partial W_3(0, t)}{\partial x_3} = 0$$

$$E_2 J_2 \frac{\partial^3 W_2(l_2, t)}{\partial x_2^3} + E_2^* J_2 \frac{\partial^4 W_2(l_2, t)}{\partial x_2^3 \partial t} + E_3 J_3 \frac{\partial^3 W_3(l_3, t)}{\partial x_3^3} + E_3^* J_3 \frac{\partial^4 W_3(l_3, t)}{\partial x_3^3 \partial t} - E_4 J_4 \frac{\partial^3 W_4(0, t)}{\partial x_4^3} -$$

$$E_4^* J_4 \frac{\partial^4 W_4(0, t)}{\partial x_4^3 \partial t} = 0$$

$$E_6 J_6 \frac{\partial^3 W_6(l_6, t)}{\partial x_6^3} + E_6^* J_6 \frac{\partial^4 W_6(l_6, t)}{\partial x_6^3 \partial t} + P_6(t) \frac{\partial W_6(l_6, t)}{\partial x_6} = -(k_Z(x_Z(t) -$$

$$W_6(l_6, t) \cos \varphi) \cos \varphi$$

$$E_5 J_5 \frac{\partial^3 W_5(l_5, t)}{\partial x_5^3} + E_5^* J_5 \frac{\partial^4 W_5(l_5, t)}{\partial x_5^3 \partial t} - E_6 J_6 \frac{\partial^3 W_6(0, t)}{\partial x_6^3} - E_6^* J_6 \frac{\partial^4 W_6(0, t)}{\partial x_6^3 \partial t} + \left[E_4 J_4 \frac{\partial^3 W_4(l_4, t)}{\partial x_4^3} + \right.$$

$$E_4^* J_4 \frac{\partial^4 W_4(l_4, t)}{\partial x_4^3 \partial t} + P_4(t) \frac{\partial W_4(l_4, t)}{\partial x_4} \left. \right] \cos \gamma - k_1 (\sin \gamma)^2 W_6(0, t) - M_Z \frac{\partial^2 W_6(0, t)}{\partial t^2} = 0$$

$$m \frac{\partial^2 x_Z(t)}{\partial t^2} + k_Z(x_Z(t) - W_6(l_6, t) \cos \varphi) = 0$$

Rozwiązanie układu równań (4.12) przewidywane jest jako szereg funkcji własnych

$$W_i(x_i, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{in}(x_i) T_n(t)$$

gdzie $w_{in}(x_i)$ jest n -tą funkcją własną, a $T_n(t)$ jest nieznaną funkcją czasu, $i = 1, 2, \dots, 6$.

Podobnie jak w przypadku pojedynczej belki, aby wyznaczyć funkcje własne należy rozwiązać zagadnienie drgań układu przy założeniu, że część zmienna obciążenia S jest równa 0.

W celu rozdzielania zmiennych w równaniach (4.12) oraz w warunkach brzegowych, (4.13)–(4.37) przyjęto:

$$W_i(x_i, t) = w_i(x_i)e^{j\omega t}$$

$$x_Z(t) = x_Z e^{j\omega t}$$

Podstawiając (4.39) i (4.40) w równaniach (4.11) i w warunkach (4.13)–(4.37) otrzymano następujące równania ruchu

$$e^{j\omega t} (E_i J_i + j\omega E_i^* J_i) \frac{\partial^4 w_i(x_i)}{\partial x_i^4} + e^{j\omega t} P_i \sin \varphi \frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} - e^{j\omega t} Q_i A_i \omega^2 w_i(x_i) + e^{j\omega t} j\omega C_E w_i(x_i) = 0$$

Po podzieleniu obu stron równania przez $e^{j\omega t} (E_i J_i + j\omega E_i^* J_i)$ otrzymano

$$\frac{\partial^4 w_i(x_i)}{\partial x_i^4} + \frac{P_i \sin \varphi}{E_i J_i + j\omega E_i^* J_i} \frac{\partial^2 w_i(x_i)}{\partial x_i^2} - \frac{Q_i A_i \omega^2 - j\omega C_E}{E_i J_i + j\omega E_i^* J_i} w_i(x_i) = 0$$

Po podstawieniu $d_i = \sqrt{\frac{P_i \sin \varphi}{E_i J_i + j\omega E_i^* J_i}}$ oraz $\Omega_i = \sqrt{\frac{Q_i A_i \omega^2 - j\omega C_E}{E_i J_i + j\omega E_i^* J_i}}$ i wstawiając do (4.42)

otrzymano

$$\frac{\partial^4 w_i(x_i)}{\partial x_i^4} + d_i^2 \frac{\partial^2 w_i(x_i)}{\partial x_i^2} - \Omega_i^2 w_i(x_i) = 0$$

Geometryczne i naturalne warunki brzegowe oraz warunki ciągłości z równań (4.13)–(4.37) po rozdzieleniu zmiennych przyjmują postać

$$w_1(0) = 0$$

$$w_1(l_1) - w_2(0) = 0$$

$$\frac{\partial w_1(l_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial w_2(0)}{\partial x_2} = 0$$

$$w_2(0) - w_3(0) = 0$$

$$w_2(l_2) - w_3(l_3) = 0$$

$$w_3(l_3) - w_4(0) = 0$$

$$\frac{\partial w_3(l_3)}{\partial x_3} - \frac{\partial w_4(0)}{\partial x_4} = 0$$

$$w_5(0) = 0$$

$$w_5(l_5) - w_6(0) = 0$$

$$\frac{\partial w_5(l_5)}{\partial x_5} - \frac{\partial w_6(0)}{\partial x_6} = 0$$

$$w_4(l_4) - w_6(0) \cos \gamma = 0$$

$$(E_1 J_1 + j\omega E_1^* J_1) \frac{\partial^2 w_1(0)}{\partial x_1^2} + j\omega C_{R2} \frac{\partial w_1(0)}{\partial x_1} = 0$$

$$(E_2 J_2 + j\omega E_2^* J_2) \frac{\partial^2 w_2(l_2)}{\partial x_2^2} = 0$$

$$(E_1 J_1 + j\omega E_1^* J_1) \frac{\partial^2 w_1(l_1)}{\partial x_1^2} - (E_2 J_2 + j\omega E_2^* J_2) \frac{\partial^2 w_2(0)}{\partial x_2^2} = 0$$

$$(E_3 J_3 + j\omega E_3^* J_3) \frac{\partial^2 w_3(0)}{\partial x_3^2} = 0$$

$$(E_3 J_3 + j\omega E_3^* J_3) \frac{\partial^2 w_3(l_3)}{\partial x_3^2} - (E_4 J_4 + j\omega E_4^* J_4) \frac{\partial^2 w_4(0)}{\partial x_4^2} = 0$$

$$(E_4 J_4 + j\omega E_4^* J_4) \frac{\partial^2 w_4(l_4)}{\partial x_4^2} = 0$$

$$(E_5 J_5 + j\omega E_5^* J_5) \frac{\partial^2 w_5(l_5)}{\partial x_5^2} - j\omega C_{R1} \frac{\partial w_5(l_5)}{\partial x_5} = 0$$

$$(E_5 J_5 + j\omega E_5^* J_5) \frac{\partial^2 w_5(l_5)}{\partial x_5^2} - (E_6 J_6 + j\omega E_6^* J_6) \frac{\partial^2 w_6(0)}{\partial x_6^2} = 0$$

$$(E_6 J_6 + j\omega E_6^* J_6) \frac{\partial^2 w_6(l_6)}{\partial x_6^2} = 0$$

$$(E_1 J_1 + j\omega E_1^* J_1) \frac{\partial^3 w_1(l_1)}{\partial x_1^3} - (E_2 J_2 + j\omega E_2^* J_2) \frac{\partial^3 w_2(0)}{\partial x_2^3} - (E_3 J_3 + j\omega E_3^* J_3) \frac{\partial^3 w_3(0)}{\partial x_3^3} + P_1 \frac{\partial w_1(l_1)}{\partial x_1} - P_3 \frac{\partial w_3(0)}{\partial x_3} = 0$$

$$(E_2 J_2 + j\omega E_2^* J_2) \frac{\partial^3 w_2(l_2)}{\partial x_2^3} + (E_3 J_3 + j\omega E_3^* J_3) \frac{\partial^3 w_3(l_3)}{\partial x_3^3} - (E_4 J_4 + j\omega E_4^* J_4) \frac{\partial^3 w_4(0)}{\partial x_4^3} = 0$$

$$(E_6 J_6 + j\omega E_6^* J_6) \frac{\partial^3 w_6(l_6)}{\partial x_6^3} + P_6 \frac{\partial w_6(l_6)}{\partial x_6} + (k_Z(x_Z - W_6(l_6) \cos \varphi)) \cos \varphi = 0$$

$$(E_5 J_5 + j\omega E_5^* J_5) \frac{\partial^3 w_5(l_5)}{\partial x_5^3} - (E_6 J_6 + j\omega E_6^* J_6) \frac{\partial^3 w_6(0)}{\partial x_6^3} + \left[(E_4 J_4 - j\omega E_4^* J_4) \frac{\partial^3 w_4(l_4)}{\partial x_4^3} + P_4 \frac{\partial w_4(l_4)}{\partial x_4} \right] \cos \gamma - (k_1(\sin \gamma)^2 - M_Z \omega^2) w_6(0) = 0$$

$$\omega^2 m x_Z + k_Z(x_Z - W_6(l_6) \cos \varphi) = 0$$

Rozwiązaniem ogólnym układu równań przemieszczeń (4.43) są funkcje

$$w_i(x_i) = C_{i1} \cosh(\alpha_i x_i) + C_{i2} \sinh(\alpha_i x_i) + C_{i3} \cos(\beta_i x_i) + C_{i4} \sin(\beta_i x_i)$$

gdzie C_{ik} dla $k = \{1,2,3,4\}$ to stałe całkowania oraz α_i i β_i przyjmują postać

$$\alpha_i = \sqrt{-\frac{1}{2}d_i^2 + \sqrt{\frac{1}{4}d_i^4 + \Omega_i^2}}$$

$$\beta_i = \sqrt{\frac{1}{2}d_i^2 + \sqrt{\frac{1}{4}d_i^4 + \Omega_i^2}}$$

Wstawiając rozwiązanie (4.69) do równań (4.44)–(4.68) otrzymano jednorodny układ równań A względem nieznanych stałych C_{ik} . Układ ten w postaci macierzowej zapisano jako

$$[A](\omega)\mathbf{C} = 0$$

gdzie $[A](\omega) = [a_{p,q}]$; $[p, q] = (1 - 24)$, a $\mathbf{C} = [C_{ik}]^T$; $i = 1, 2 \dots 6$; $k = \{1,2,3,4\}$.

W przypadku, gdy przy stałych C_{ik} wyznacznik macierzy współczynników jest równy zero to układ posiada nietrywialnie rozwiązanie.

$$\det A(\omega) = 0$$

Niezerowe elementy macierzy $[A](\omega)$ dla układu przedstawionego na rys. 4.5 przedstawiono w Dodatku D1. Równanie (4.73) pozwala na obliczenie wartości własnych układu ω . Obliczone wartości własne były z kolei podstawą do wyznaczenia funkcji własnych badanego układu.

4.2 Określenie warunku ortogonalności funkcji własnych

Aby rozwinąć funkcje własne w szereg (4.38) założono ich ortogonalność. W celu wyznaczenia warunku ortogonalności równanie (4.11) przekształcono do postaci

$$(E_i J_i + j\omega E_i^* J_i) \frac{\partial^4 w_i(x_i)}{\partial x_i^4} + P_i \frac{\partial^2 w_i(x_i)}{\partial x_i^2} - (\varrho_i A_i \omega^2 - j\omega C_E) w_i(x_i) = 0$$

Równanie (4.74) odpowiednio dla n -tej i m -tej funkcji własnej przyjmują postać

$$(E_i J_i + j\omega_n E_i^* J_i) \frac{\partial^4 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^4} + P_i \frac{\partial^2 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^2} - (\varrho_i A_i \omega_n^2 - j\omega_n C_E) w_{in}(x_i) = 0$$

$$(E_i J_i + j\omega_m E_i^* J_i) \frac{\partial^4 w_{im}(x_i)}{\partial x_i^4} + P_i \frac{\partial^2 w_{im}(x_i)}{\partial x_i^2} - (\varrho_i A_i \omega_m^2 - j\omega_m C_E) w_{im}(x_i) = 0$$

Po przemnożeniu równań (4.75) i (4.76) odpowiednio przez $w_{im}(x_i)$ i $w_{in}(x_i)$ otrzymano

$$(E_i J_i + j\omega_n E_i^* J_i) \frac{\partial^4 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^4} w_{im}(x_i) + P_i \frac{\partial^2 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^2} w_{im}(x_i) - (\varrho_i A_i \omega_n^2 - j\omega_n C_E) w_{in}(x_i) w_{im}(x_i) = 0$$

$$(E_i J_i + j\omega_m E_i^* J_i) \frac{\partial^4 w_{im}(x_i)}{\partial x_i^4} w_{in}(x_i) + P_i \frac{\partial^2 w_{im}(x_i)}{\partial x_i^2} w_{in}(x_i) - (\varrho_i A_i \omega_m^2 - j\omega_m C_E) w_{im}(x_i) w_{in}(x_i) = 0$$

Następnie przeprowadzając całkowanie równań (4.77) i 4.78) w granicach od 0 do l_i otrzymano

$$(E_i J_i + j\omega_n E_i^* J_i) \int_0^{l_i} \frac{\partial^4 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^4} w_{im}(x_i) dx_i + P_i \int_0^{l_i} \frac{\partial^2 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^2} w_{im}(x_i) dx_i - (\varrho_i A_i \omega_n^2 - j\omega_n C_E) \int_0^{l_i} w_{im}(x_i) w_{in}(x_i) dx_i = 0$$

$$(E_i J_i + j\omega_m E_i^* J_i) \int_0^{l_i} \frac{\partial^4 w_{im}(x_i)}{\partial x_i^4} w_{in}(x_i) dx_i + P_i \int_0^{l_i} \frac{\partial^2 w_{im}(x_i)}{\partial x_i^2} w_{in}(x_i) dx_i - (\varrho_i A_i \omega_m^2 - j\omega_m C_E) \int_0^{l_i} w_{im}(x_i) w_{in}(x_i) dx_i = 0$$

Przeprowadzając całkowanie przez części pierwszej całki z równania (4.79) otrzymano

$$\int_0^{l_i} \frac{\partial^4 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^4} w_{im}(x_i) dx_i = w_{im}(x_i) \frac{\partial^3 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^3} \Big|_0^{l_i} - \frac{\partial w_{im}(x_i)}{\partial x_i} \frac{\partial^2 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^2} \Big|_0^{l_i} + \int_0^{l_i} \frac{\partial^2 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 w_{im}(x_i)}{\partial x_i^2} dx_i$$

Przeprowadzając analogiczne obliczenia dla pierwszej całki z równania (4.80) otrzymano

$$\int_0^{l_i} \frac{\partial^4 w_{im}(x_i)}{\partial x_i^4} w_{in}(x_i) dx_i = w_{in}(x_i) \frac{\partial^3 w_{im}(x_i)}{\partial x_i^3} \Big|_0^{l_i} - \frac{\partial w_{in}(x_i)}{\partial x_i} \frac{\partial^2 w_{im}(x_i)}{\partial x_i^2} \Big|_0^{l_i} + \int_0^{l_i} \frac{\partial^2 w_{im}(x_i)}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^2} dx_i$$

Podstawiając do równań (4.79) i (4.80) odpowiednio (4.81) i (4.82) otrzymano

$$(E_i J_i + j \omega_n E_i^* J_i) \left(w_{im}(x_i) \frac{\partial^3 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^3} \Big|_0^{l_i} - \frac{\partial w_{im}(x_i)}{\partial x_i} \frac{\partial^2 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^2} \Big|_0^{l_i} + \int_0^{l_i} \frac{\partial^2 w_{im}(x_i)}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^2} dx_i \right) + P_i \int_0^{l_i} \frac{\partial^2 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^2} w_{im}(x_i) dx_i - (Q_i A_i \omega_n^2 - j \omega_n C_E) \int_0^{l_i} w_{im}(x_i) w_{in}(x_i) dx_i = 0$$

$$(E_i J_i + j \omega_m E_i^* J_i) \left(w_{in}(x_i) \frac{\partial^3 w_{im}(x_i)}{\partial x_i^3} \Big|_0^{l_i} - \frac{\partial w_{in}(x_i)}{\partial x_i} \frac{\partial^2 w_{im}(x_i)}{\partial x_i^2} \Big|_0^{l_i} + \int_0^{l_i} \frac{\partial^2 w_{im}(x_i)}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^2} dx_i \right) + P_i \int_0^{l_i} \frac{\partial^2 w_{im}(x_i)}{\partial x_i^2} w_{in}(x_i) dx_i - (Q_i A_i \omega_m^2 - j \omega_m C_E) \int_0^{l_i} w_{im}(x_i) w_{in}(x_i) dx_i = 0$$

Odejmując stronami równania (4.83) i (4.84) otrzymano

$$E_i J_i \left(w_{im}(x_i) \frac{\partial^3 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^3} \Big|_0^{l_i} - w_{in}(x_i) \frac{\partial^3 w_{im}(x_i)}{\partial x_i^3} \Big|_0^{l_i} \right) + E_i J_i \left(\frac{\partial w_{in}(x_i)}{\partial x_i} \frac{\partial^2 w_{im}(x_i)}{\partial x_i^2} \Big|_0^{l_i} - \frac{\partial w_{im}(x_i)}{\partial x_i} \frac{\partial^2 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^2} \Big|_0^{l_i} \right) + j E_i^* J_i \left(\omega_n w_{im}(x_i) \frac{\partial^3 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^3} \Big|_0^{l_i} - \omega_m w_{in}(x_i) \frac{\partial^3 w_{im}(x_i)}{\partial x_i^3} \Big|_0^{l_i} \right) + j E_i^* J_i \left(\omega_m \frac{\partial w_{in}(x_i)}{\partial x_i} \frac{\partial^2 w_{im}(x_i)}{\partial x_i^2} \Big|_0^{l_i} - \omega_n \frac{\partial w_{im}(x_i)}{\partial x_i} \frac{\partial^2 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^2} \Big|_0^{l_i} \right) + j E_i^* J_i \int_0^{l_i} \frac{\partial^2 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 w_{im}(x_i)}{\partial x_i^2} dx_i (\omega_n -$$

$$\omega_m) + P_i \left(\int_0^{l_i} \frac{\partial^2 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^2} w_{im}(x_i) dx_i - \int_0^{l_i} \frac{\partial^2 w_{im}(x_i)}{\partial x_i^2} w_{in}(x_i) dx_i \right) + \int_0^{l_i} w_{im}(x_i) w_{in}(x_i) dx_i \left(\varrho_i A_i (\omega_m^2 - \omega_n^2) - j C_E (\omega_m + \omega_n) \right) = 0$$

Wstawiając warunki brzegowe (4.44)–(4.68) do równania (4.85) otrzymano warunek ortogonalności w postaci

$$\sum_{i=1}^6 \left\{ j E_i^* J_i \int_0^{l_i} \frac{\partial^2 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 w_{im}(x_i)}{\partial x_i^2} dx_i (\omega_n - \omega_m) + \int_0^{l_i} w_{im}(x_i) w_{in}(x_i) dx_i \left(\varrho_i A_i (\omega_m^2 - \omega_n^2) - j C_E (\omega_m + \omega_n) \right) \right\} \Bigg|_{\gamma_n^2 \text{ dla } m=n}^0 \text{ dla } m \neq n = 0$$

4.3 Sformułowanie zagadnienia stateczności dynamicznej dla układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego

W celu analizy stateczności dynamicznej badanego układu należy jego równanie ruchu przedstawić w formie równania Mathieu. Pierwszym krokiem do przekształcenia równania ruchu układu (4.11) do postaci równania Mathieu jest podstawienie do niego rozwiązania w postaci szeregu funkcji własnych (4.38). Otrzymujemy wówczas dla n -tej funkcji własnej

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\varrho_i A_i w_{in}(x_i) \frac{\partial^2 T_{in}(t)}{\partial t^2} + \left(E_i^* J_i \frac{\partial^4 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^4} + C_E w_{in}(x_i) \right) \frac{\partial T_{in}(t)}{\partial t} + \left(E_i J_i \frac{\partial^4 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^4} + P_i \frac{\partial^2 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^2} + S \cos vt \frac{\partial^2 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^2} \right) T_{in}(t) \right] = 0$$

Po pomnożeniu równania (4.87) przez m -tą funkcję własną otrzymano

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\varrho_i A_i w_{in}(x_i) w_{im}(x_i) \frac{\partial^2 T_{in}(t)}{\partial t^2} + \left(E_i^* J_i \frac{\partial^4 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^4} w_{im}(x_i) + \right. \right. \\ \left. \left. C_E w_{in}(x_i) w_{im}(x_i) \right) \frac{\partial T_{in}(t)}{\partial t} + \left(E_i J_i \frac{\partial^4 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^4} w_{im}(x_i) + P_i \frac{\partial^2 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^2} w_{im}(x_i) + \right. \right. \\ \left. \left. S \cos vt \frac{\partial^2 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^2} w_{im}(x_i) \right) T_{in}(t) \right] = 0$$

Z kolei z równania (4.42) dla n -tej funkcji własnej po pomnożeniu przez m -tą funkcję własną otrzymano

$$E_i J_i \frac{\partial^4 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^4} w_{im}(x_i) + P_i \frac{\partial^2 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^2} w_{im}(x_i) = (\varrho_i A_i \omega^2 - i\omega C_E) w_{in}(x_i) w_{im}(x_i) - \\ j\omega E_i^* J_i \frac{\partial^4 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^4} w_{im}(x_i)$$

Uwzględniając w (4.88) zależność (4.89) otrzymano równanie w postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\varrho_i A_i w_{in}(x_i) w_{im}(x_i) \frac{\partial^2 T_{in}(t)}{\partial t^2} + \left(E_i^* J_i \frac{\partial^4 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^4} w_{im}(x_i) + \right. \right. \\ \left. \left. C_E w_{in}(x_i) w_{im}(x_i) \right) \frac{\partial T_{in}(t)}{\partial t} + \left((\varrho_i A_i \omega^2 - j\omega C_E) w_{in}(x_i) w_{im}(x_i) - \right. \right. \\ \left. \left. j\omega E_i^* J_i \frac{\partial^4 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^4} w_{im}(x_i) + S \cos vt \frac{\partial^2 w_{in}(x_i)}{\partial x_i^2} w_{im}(x_i) \right) T_{in}(t) \right] = \\ 0$$

Jak wspomniano wcześniej istotne znaczenie w równaniu (4.90), za [177], ma jedynie pierwszy wyraz sumy. Analizowany jest rezonans parametryczny dla pierwszej (podstawowej) częstości drgań układu $n = 1$ (indeks w kolejnych obliczeniach pominięty), co przy uwzględnieniu warunku ortogonalności (4.86) pozwala przekształcić równanie (4.90) do postaci

$$\begin{aligned} & \varrho_i A_i \int_0^{l_i} w_i^2(x_i) dx_i \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \left(E_i^* J_i \int_0^{l_i} \frac{\partial^4 w_i(x_i)}{\partial x_i^4} w_i(x_i) dx_i + C_E \int_0^{l_i} w_i^2(x_i) dx_i \right) \frac{\partial T(t)}{\partial t} + \\ & \left((\varrho_i A_i \omega^2 - j\omega C_E) \int_0^{l_i} w_i^2(x_i) dx_i - j\omega E_i^* J_i \int_0^{l_i} \frac{\partial^4 w_i(x_i)}{\partial x_i^4} w_i(x_i) dx_i + \right. \\ & \left. S \cos vt \int_0^{l_i} \frac{\partial^2 w_i(x_i)}{\partial x_i^2} w_i(x_i) dx_i \right) T(t) = 0 \end{aligned}$$

Dzieląc przez $\varrho_i A_i \int_0^{l_i} w_i^2(x_i) dx_i$ otrzymano

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \left(\frac{E_i^* J_i \int_0^{l_i} \frac{\partial^4 w_i(x_i)}{\partial x_i^4} w_i(x_i) dx_i}{\varrho_i A_i \int_0^{l_i} w_i^2(x_i) dx_i} + \frac{C_E}{\varrho_i A_i} \right) \frac{\partial T(t)}{\partial t} + \left(\omega^2 - \frac{j\omega C_E}{\varrho_i A_i} - \frac{j\omega E_i^* J_i \int_0^{l_i} \frac{\partial^4 w_i(x_i)}{\partial x_i^4} w_i(x_i) dx_i}{\varrho_i A_i \int_0^{l_i} w_i^2(x_i) dx_i} + \right. \\ & \left. S \cos vt \frac{\int_0^{l_i} \frac{\partial^2 w_i(x_i)}{\partial x_i^2} w_i(x_i) dx_i}{\varrho_i A_i \int_0^{l_i} w_i^2(x_i) dx_i} \right) T(t) = 0 \end{aligned}$$

Po podstawieniu do równania (4.92) zależności $\tau = vt$ otrzymano odpowiednio

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 T(\tau)}{\partial \tau^2} + \left(\frac{C_E}{v^2 \varrho_i A_i} + \frac{E_i^* J_i \int_0^{l_i} \frac{\partial^4 w_i(x_i)}{\partial x_i^4} w_i(x_i) dx_i}{v^2 \varrho_i A_i \int_0^{l_i} w_i^2(x_i) dx_i} \right) \frac{\partial T(\tau)}{\partial \tau} + \left(\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{j\omega C_E}{v^2 \varrho_i A_i} - \right. \\ & \left. \frac{j\omega E_i^* J_i \int_0^{l_i} \frac{\partial^4 w_i(x_i)}{\partial x_i^4} w_i(x_i) dx_i}{v^2 \varrho_i A_i \int_0^{l_i} w_i^2(x_i) dx_i} + \frac{S \int_0^{l_i} \frac{\partial^2 w_i(x_i)}{\partial x_i^2} w_i(x_i) dx_i}{v^2 \varrho_i A_i \int_0^{l_i} w_i^2(x_i) dx_i} \cos \tau \right) T(\tau) = 0 \end{aligned}$$

Równanie (4.93) ma formę równania Mathieu, w którym uwzględniono tłumienie drgań

$$\frac{\partial^2 T(\tau)}{\partial \tau^2} + c \frac{\partial T(\tau)}{\partial \tau} + (\delta + \epsilon \cos t) T(\tau) = 0$$

gdzie

$$c = \frac{C_E}{v^2 \sum_{i=1}^n \varrho_i A_i} + \frac{\sum_{i=1}^n E_i^* J_i \int_0^{l_i} \frac{\partial^4 w_i(x_i)}{\partial x_i^4} w_i(x_i) dx_i}{v^2 \sum_{i=1}^n \varrho_i A_i \int_0^{l_i} w_i^2(x_i) dx_i}$$

$$\delta = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{j\omega C_E}{v^2 \sum_{i=1}^n \varrho_i A_i} - \frac{j\omega \sum_{i=1}^n E_i^* J_i \int_0^{l_i} \frac{\partial^4 w_i(x_i)}{\partial x_i^4} w_i(x_i) dx_i}{v^2 \sum_{i=1}^n \varrho_i A_i \int_0^{l_i} w_i^2(x_i) dx_i}$$

$$\epsilon = \frac{S \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{\partial^2 w_i(x_i)}{\partial x_i^2} w_i(x_i) dx_i}{v^2 \sum_{i=1}^n \varrho_i A_i \int_0^{l_i} w_i^2(x_i) dx_i}$$

Wyznaczenie wartości liczbowych parametrów opisanych zależnościami (4.95), (4.96) i (4.97) pozwala na określenie możliwości utraty stateczności dynamicznej przez badany układ.

4.4 Parametry wykorzystywane w modelu

4.4.1 Parametry geometryczne i fizyczne

W pracy analizowano układ zmiany wysięgu żurawia samochodowego DST0285 (rys. 4.1 i rys. 4.2), którego model został przedstawiony na rys. 4.5. Parametry fizyczne i geometryczne wykorzystane w badaniach układu i zostały zamieszczone w tabeli 4.1. Układ zmiany wysięgu składa się z siłownika zmiany wysięgu, mechanicznego układu linowego oraz z trójczłonowego wysięgnika teleskopowego. Wysięgnik zbudowany jest z członu stałego oraz dwóch członów wysuwnych.

W ramach analizowanego modelu fizycznego układu uwzględniono istotne cechy rzeczywistego obiektu takie jak skokowa zmienność sztywności belki modelującej wysięgnik teleskopowy, geometrię układu określoną relacją geometryczną między kątami φ i γ , wpływ siły na głowicę wysięgnika wynikającą z oddziaływania ładunku zawieszonego na linie, uwzględnienie wpływu cieczy hydraulicznej siłownika zmiany wysięgu na drgania układu modelując go poprzez sprężyste zamocowanie tłoczyska oraz uwzględniając wpływ masy wysięgnika na drgania analizowanego układu.

W modelu przyjęto następujące uproszczenia:

- podłoże, na którym stoi żuraw samochodowy oraz jego podwozie są nieodkształcalne,
- rama obrotowa nadwozia może się obracać jedynie wokół pionowej osi podwozia i jest nieodkształcalna,
- nie uwzględniono kąta obrotu wysięgnika na jego dynamikę,
- tłoczysko siłownika zmiany wysięgu jest układem belek podpartym sprężyscie w kierunku wzdłużnym.

Tabela 4.1 Geometryczne i fizyczne parametry modelu [124], [194].

Parametr	Wartość
l_{s_1} – długość stałego elementu wysięgnika żurawia [m]	7,95
l_{w_2} – długość chowanego elementu drugiego wysięgnika żurawia [m]	8,3
l_{w_3} – długość chowanego elementu trzeciego wysięgnika żurawia [m]	8,2
l_s – ustawiony skok siłownika teleskopowego [m]	1,435 ÷ 3.160
H_1 – wysokość zewnętrzna podstawowego elementu wysięgnika żurawia [m]	0,596

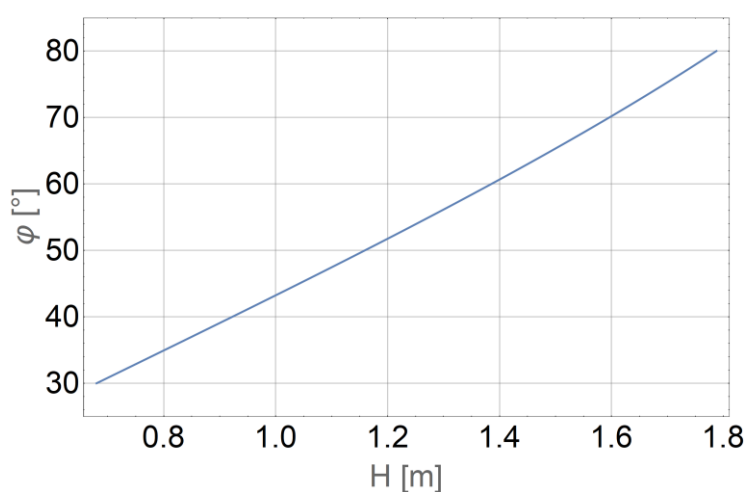
H_2 – wysokość zewnętrzna 2 elementu wysięgnika żurawia [m]	0,517
H_3 – wysokość zewnętrzna 3 elementu wysięgnika żurawia [m]	0,448
h_1 – wysokość wewnętrzna podstawowego elementu wysięgnika żurawia [m]	0,585
h_2 – wysokość wewnętrzna 2 elementu wysięgnika żurawia [m]	0,509
h_3 – wysokość wewnętrzna 3 elementu wysięgnika żurawia [m]	0,441
B_1 – szerokość zewnętrzna podstawowego elementu wysięgnika żurawia [m]	0,397
B_2 – szerokość zewnętrzna 2 elementu wysięgnika żurawia [m]	0,355
B_3 – szerokość zewnętrzna 3 elementu wysięgnika żurawia [m]	0,311
b_1 – szerokość wewnętrzna podstawowego elementu wysięgnika dźwigu [m]	0,39

b_2 – szerokość wewnętrzna 2 elementu wysięgnika dźwigu [m]	0,348
b_3 – szerokość wewnętrzna 3 elementu wysięgnika dźwigu [m]	0,304
D_c – średnica zewnętrzna cylindra [m]	0,277
d_c – średnica wewnętrzna cylindra [m]	0,25
D_t – średnica zewnętrzna tłoka [m]	0,16
d_t – średnica wewnętrzna tłoka [m]	0,128
l_t – długość tłoczyska [m]	2,3
ϱ_i – gęstość materiału w wysięgniku dźwigu i cylindrze [kg/m ³]	7860
ϱ_c – gęstość cieczy w cylindrze [kg/m ³]	890
E_i – moduł Younga dla materiału wysięgnika dźwigu i cylindra [Pa]	$2,1 \cdot 10^{11}$
E_c – moduł sprężystości postaciowej [Pa]	$1,25 \cdot 10^9$

R_0 – odległość mocowania siłownika w ramie od prostej pionowej przechodzącej przez punkt mocowania wysięgnika [m]	1,14
Z_0 – odległość mocowania wysięgnika od ramy [m]	0,8
l_0 – odległość między podparciem wysięgnika w ramie i podparciem przez siłownik [m]	3,16
H – wysokość słupa cieczy w siłowniku zmiany wysięgu [m]	0,1÷1,7

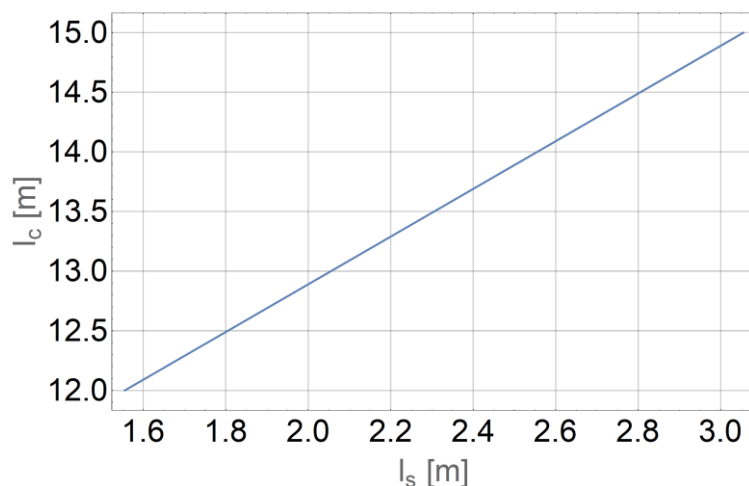
Na podstawie zależności geometrycznych w badanym układzie można wyznaczyć relacje pomiędzy zmiennymi parametrami układu.

Zależność między wysokością słupa cieczy w siłowniku zmiany wysięgu a kątem φ została przedstawiona na rys. 4.6.



Rys. 4.6. Wpływ wysokości słupa cieczy na kąt uniesienia wysięgnika.

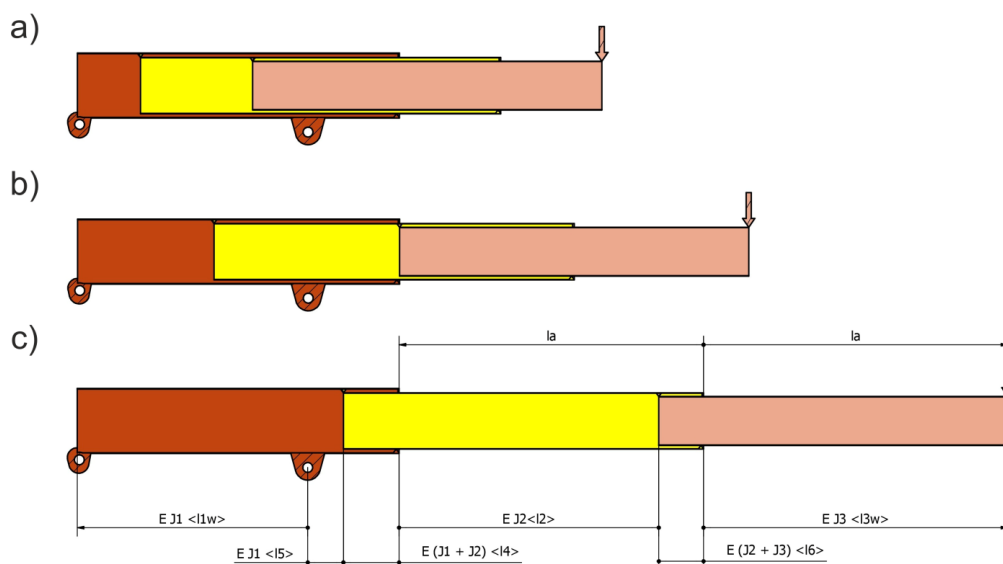
Relacja między wartością wysunięcia siłownika teleskopowania a długością całkowitą wysięgnika, dla badanego zakresu, przedstawiono na rys. 4.7.



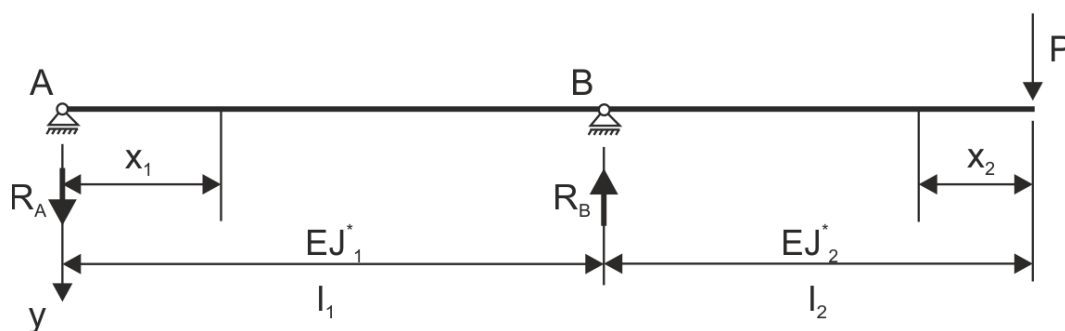
Rys. 4.7. Wpływ długości wysunięcia siłownika teleskopowania na długość całkowitą wysięgnika.

4.4.2 Wyznaczanie sztywności zastępczej trójczłonowego wysięgnika teleskopowego

Wysięgnik teleskopowy żurawia DST0285 może, względem punktu podparcia siłownika, przyjmować sześć różnych pozycji, z czego trzy przykładowe przedstawiono na rys. 4.8. Bazując na modelu przedstawionym na rys. 4.5 każdorazowo sztywność poszczególnych członów układu jest zastępowana sztywnością zastępczą układu jak na rys. 4.9. Korzystając z twierdzenia Castigliano wyznaczono sztywność zastępczą układu zredukowanego tak, aby wartość ugięcia końca wysięgnika rzeczywistego i modelu z rys. 4.9 była jednakowa [194].



Rys. 4.8. Przykładowe położenia członów wysuwnych w stosunku do członu podstawowego trójczłonowego wysięgnika teleskopowego.



Rys. 4.9. Układ zredukowany.

Ugięcia końca układu zredukowanego (rys. 4.9) można wyznaczyć poprzez

$$f_c = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{E J_1^*} \int_0^{l_1} M_{g1} \frac{\partial M_{g1}}{\partial P} dx_1 + \frac{1}{E J_2^*} \int_0^{l_2} M_{g2} \frac{\partial M_{g2}}{\partial P} dx_2 \quad (4.98)$$

Korzystając z równania momentów względem punktu A oraz z równania rzutów sił na oś y otrzymano

$$M_{g1} = -P \frac{l_2}{l_1} x_1 \quad (4.99)$$

$$M_{g2} = -Px_2 \quad (4.100)$$

Różniczkując otrzymano

$$\frac{\partial M_{g1}}{\partial P} = -\frac{l_2}{l_1} x_1 \quad (4.101)$$

$$\frac{\partial M_{g2}}{\partial P} = -x_2 \quad (4.102)$$

Następnie podstawiając równania (4.99)–(4.102) do (4.98) otrzymano

$$f_c = \frac{l_2^3 P}{3 E J_2^*} + \frac{l_1 l_2^2 P}{3 E J_1^*} \quad (4.103)$$

gdzie J_1^* i J_2^* to odpowiednio momenty bezwładności pierwszej i drugiej części belki zredukowanej.

Rozpatrując przypadek z rys. 4.8b przyjęto, że $J_1^* = J_1$ i następnie wyznaczano wartość J_2^* korzystając z zależności

$$J_2^* = \frac{l_2^3 P}{3 E (f_2 - a^*)} \quad (4.104)$$

gdzie

$$a^* = \frac{1}{3 E J_1^*} l_1 l_2^2 P \quad (4.105)$$

$$f_2 = \sum_{n=1}^{12} a_n \quad (4.106)$$

gdzie

$$a_1 = \frac{l_{3w}^3 P}{3 E_1 J_3} \quad (4.107)$$

$$a_2 = \frac{\left(l_{3w}^2 l_4 + 2 l_{3w} l_4^2 + \frac{l_4^3}{3}\right) P}{E_1 J_4} \quad (4.108)$$

$$a_3 = \frac{(l_{3w} + l_4)^2 l_5 P}{E_1 J_5} \quad (4.109)$$

$$a_4 = \frac{(l_{3w} + l_4) l_5^2 P}{E_1 J_5} \quad (4.110)$$

$$a_5 = \frac{l_5^3 P}{3 E_1 J_5} \quad (4.111)$$

$$a_6 = \frac{(l_{3w} + l_4 + l_5)^2 l_6 P}{E_1 J_6} \quad (4.112)$$

$$a_7 = \frac{(l_{3w} + l_4 + l_5) l_6^2 P}{E_1 J_6} \quad (4.113)$$

$$a_8 = \frac{l_6^3 P}{3 E_1 J_6} \quad (4.114)$$

$$a_9 = \frac{(l_{3w} + l_4 + l_5 + l_6)^2 l_{1w}^3 P}{3 E_1 J_1 (l_{1w} + l_7)^2} \quad (4.115)$$

$$a_{10} = \frac{(l_{3w} + l_4 + l_5 + l_6)^2 l_{1w} l_7^2 P}{E_1 J_7 (l_{1w} + l_7)^2} \quad (4.116)$$

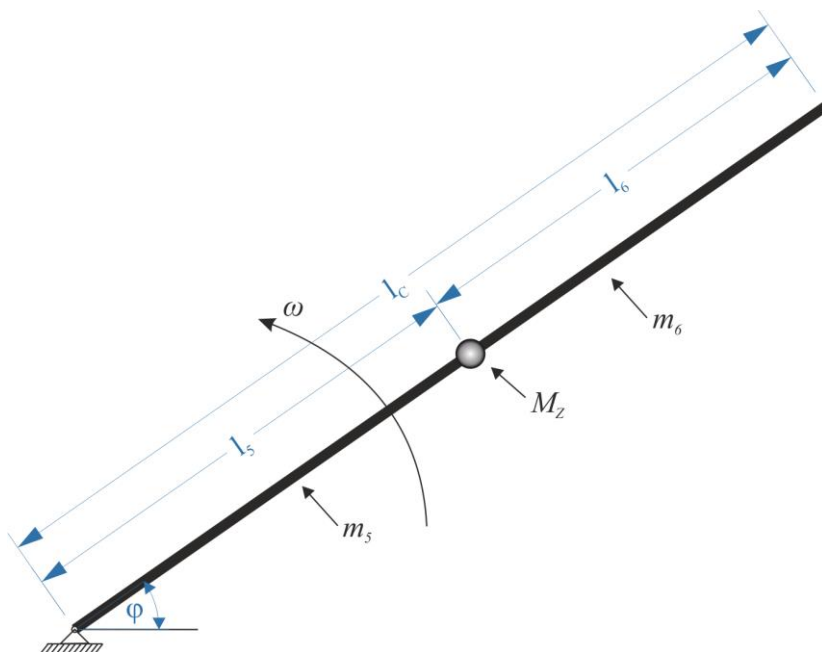
$$a_{11} = \frac{(l_{3w} + l_4 + l_5 + l_6)^2 l_7 l_{1w}^2 P}{E_1 J_7 (l_{1w} + l_7)^2} \quad (4.117)$$

$$a_{12} = \frac{(l_{3w} + l_4 + l_5 + l_6)^2 l_7^3 P}{E_1 J_7 (l_{1w} + l_7)^2} \quad (4.118)$$

4.4.3 Wyznaczanie masy zastępczej układu

W celu wyznaczenia masy zastępczej układu zredukowanego, przedstawionego na rys. 4.10, należy najpierw przeprowadzić redukcję masy wysięgnika do punktu, w którym jest podparty siłownikiem, a później należy dodać masę tłoczyska [194].

Następnie należy porównać energie kinetyczne układu ciągłego (rzeczywistego) z układem dyskretnym.



Rys. 4.10. Masa zastępcza układu zredukowanego.

Energia kinetyczna dla układu rzeczywistego została określona jako

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (4.119)$$

gdzie

$$J = \frac{1}{3} m l^2 = \frac{1}{3} (m_5 + m_6) l^2 \quad (4.120)$$

więc

$$E_k = \frac{1}{6} (m_5 + m_6) (l_5 + l_6)^2 \dot{\varphi}^2 \quad (4.121)$$

Dla układu dyskretnego energia kinetyczna wynosi

$$E_{kd} = \frac{1}{2} M_{z1} l_5^2 \dot{\varphi}^2 \quad (4.122)$$

Przyrównując (4.121) i (4.122) otrzymano zależność pozwalającą określić masę zastępczą

$$M_{z1} = \frac{1}{3} (m_5 + m_6) \left(1 + 2 \frac{l_6}{l_5} + \frac{l_6^2}{l_5^2} \right) \quad (4.123)$$

Uwzględnienie masy tłoczyska daje

$$M_z = \frac{1}{3} (m_5 + m_6) \left(1 + 2 \frac{l_6}{l_5} + \frac{l_6^2}{l_5^2} \right) + m_t = M_{z1} + m_t \quad (4.124)$$

4.4.4 Model cieczy wypełniającej cylinder

Przy braku obciążenia siłownika ($P = 0$), dla wysokości słupa cieczy H_0 , objętość cylindra wynosi

$$V_0 = \frac{\pi d_c^2 H_0}{4} \quad (4.125)$$

Dla przyrostu ciśnienia Δp , które występuje przy obciążeniu $P > 0$, uwzględniając współczynnik ściśliwości cieczy ξ (związany z modułem sprężystości objętościowej E_c poprzez relację $\xi = 1/E_c$), następuje zmiana objętości cieczy

$$V_P = V_0 (1 - \xi \Delta p) = V_0 \left(1 - \frac{\Delta p}{E_c} \right) \quad (4.126)$$

Objętość cieczy pod obciążeniem, dla słupa cieczy o wysokości $H = H_0 - \Delta H$, można opisać również jako

$$V_P = \frac{\pi d_c^2 H}{4} \quad (4.127)$$

Pod wpływem siły zewnętrznej P powstaje ciśnienie cieczy w siłowniku p określone poprzez

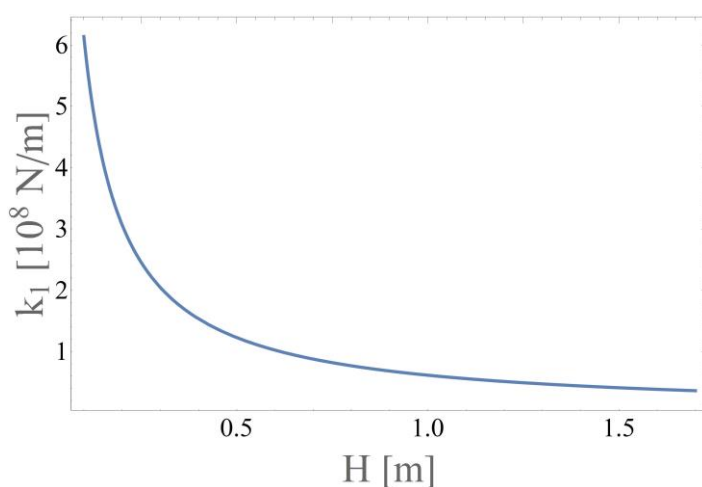
$$p = \frac{4 P}{\pi d_c^2} \quad (4.128)$$

Na podstawie stosunku siły do odkształcenia wywołanego tą siłą można wyznaczyć współczynnik sztywności jako

$$k_1 = \frac{P}{\Delta H} \quad (4.129)$$

Współczynnik sztywności k_1 w funkcji wysokości słupa cieczy H można określić porównując (4.126) i (4.127) oraz po uwzględnieniu relacji (4.128) i (4.129) jako

$$k_1 = \frac{\pi d_c^2 E_c}{4 H} \quad (4.130)$$



Rys. 4.11. Współczynnik sztywności k w funkcji wysokości słupa cieczy H dla analizowanego układu.

Na rys 4.11 przedstawiono wpływ wysokości słupa cieczy w siłowniku zmiany wysięgu na współczynnik sztywności sprężyny modelującej ciecz wypełniającą cylinder.

4.4.5 Modelowanie układu linowego

Zatrzymany w trakcie opuszczania lub poderwany ładunek, drgając pionowo, obciąża układ zmiany wysięgu siłą pulsacyjną z określoną częstotliwością wymuszenia. Częstotliwość ta zależy od sprężystości układu linowego oraz od masy ładunku zawieszonego na linie. W pracy przyjęto za [195], [196] sześciopasmowe olinowanie uwzględniając sztywność pasm od głowicy do zblocza jak również od głowicy do wciągarki.

Sztywność zastępczą układu linowego określono za [197] jako

$$k_z = \frac{n^2 A_l E_l}{l_0 + n l_l} \quad (4.131)$$

gdzie

- n – ilość pasm liny (przyjęto $n = 6$),
- E_l – moduł Younga dla materiału liny ($E_l = 1,25 \cdot 10^{11}$ Pa),
- A_l – przekrój liny (gdzie średnica pasma wynosi $d = 0,016$ m),
- l_0 – długość liny od głowicy wysięgnika do wciągarki,
- l_l – długość olinowania od głowicy wysięgnika do zblocza.

Uwzględniając masę m ładunku oraz sztywność zastępczą układu linowego (4.131) wyznaczono częstotliwość wymuszenia ν jako

$$\nu = \sqrt{\frac{k_z}{m}} \quad (4.132)$$

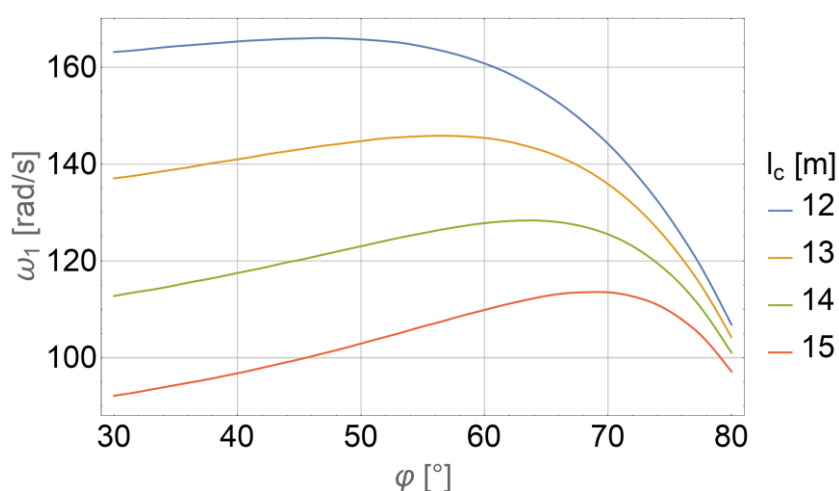
Przyjmując rzeczywiste prędkości opuszczania (podnoszenia) ładunku v_0 , częstotliwości wymuszenia ν oraz sztywności zastępczej układu linowego k_z można wyznaczyć część zmienną obciążenia S jako

$$S = k_z \sqrt{\frac{v_0^2}{\nu^2}} \quad (4.133)$$

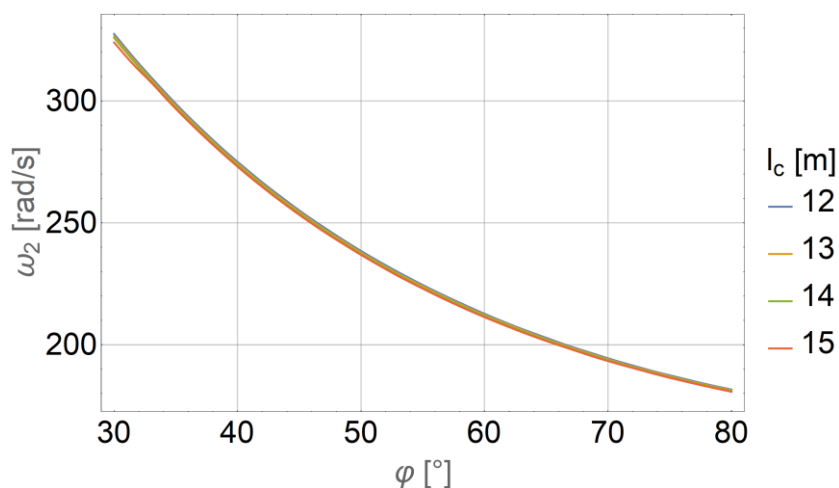
Wyznaczona wartość części zmiennej obciążenia S pozwoliła na określenie całkowitego obciążenia parametrycznego badanego układu.

4.5 Wpływ geometrii i obciążenia na częstotliwości własne układu nietłumionego

W celu zbadania wpływu tłumienia na układ zmiany wysięgu żurawia samochodowego wstępnie przeprowadzona została analiza układu bez tłumienia. Na rys. 4.12 i 4.13 przedstawiono odpowiednio wpływ kąta nachylenia wysięgnika oraz jego długości całkowitej na pierwszą i drugą częstotliwość własną. Układ obciążony był ładunkiem o masie 10^4 kg zawieszonym na linie o długości 5 m. Wraz ze wzrostem długości całkowitej wysięgnika jak było do przewidzenia wartość pierwszej częstotliwości drgań zmniejszała się. Wartości drugiej częstotliwości obniżyły się nieznacznie. Wraz ze wzrostem kąta nachylenia wysięgnika φ wartości pierwszej częstotliwości własnej wzrastały, osiągały maksimum, po czym spadały by dla wartości kąta 80° osiągnąć zbliżone wartości. Im większa była długość całkowita wysięgnika tym maksimum pierwszej częstotliwości własnej osiągane było dla wyższych wartości kąta nachylenia. Wartość drugiej częstotliwości własnej spadała wraz ze wzrostem kąta nachylenia. Na wykresach dla układów bez tłumienia częstotliwości drgań oznaczono jako $\omega_i = \text{Re}(\omega_i)$.

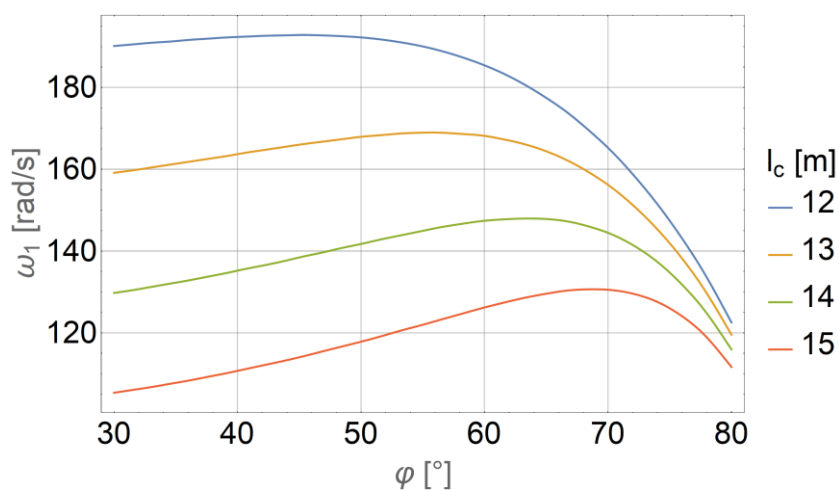


Rys. 4.12. Wpływ kąta nachylenia wysięgnika oraz jego długości całkowitej na pierwszą częstotliwość własną dla obciążenia $m = 10^4$ kg.

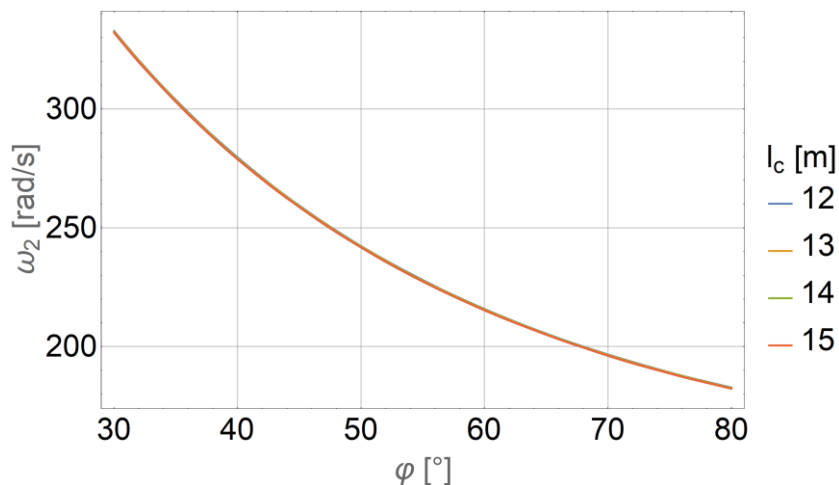


Rys. 4.13. Wpływ kąta nachylenia wysięgnika oraz jego długości całkowitej na drugą częstość własną dla obciążenia $m = 10^4 \text{ kg}$.

Następnie przeprowadzona została analiza wpływu wartości kąta nachylenia i całkowitej długości wysięgnika przy dziesięciokrotnie mniejszym obciążeniu (rys. 4.14 i 4.15). Jak można zauważyć charakter zmian częstości własnych pozostał bez zmian, natomiast wartości częstości własnych nieznacznie się zwiększyły.

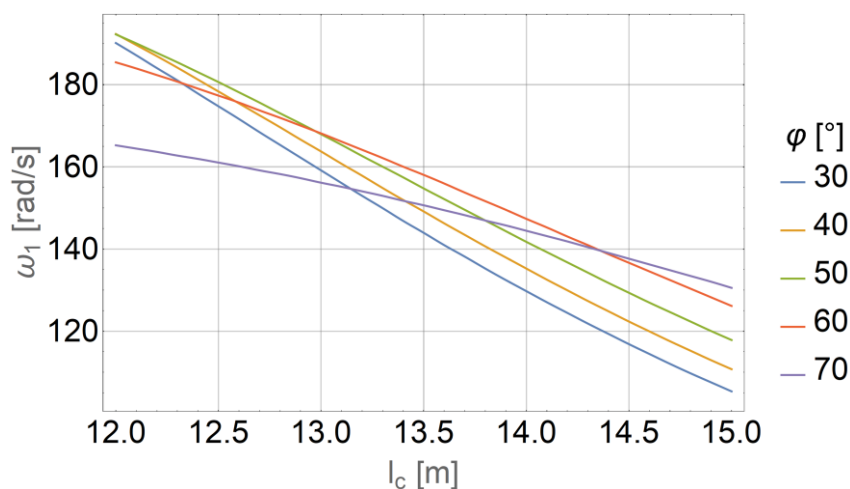


Rys. 4.14. Wpływ kąta nachylenia wysięgnika oraz jego długości całkowitej na pierwszą częstość własną dla obciążenia $m = 10^3 \text{ kg}$.

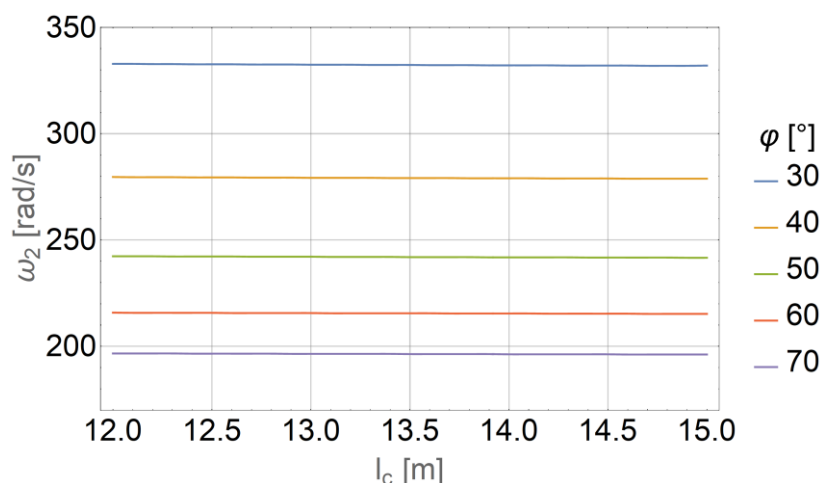


Rys. 4.15. Wpływ kąta nachylenia wysięgnika oraz jego długości całkowitej na drugą częstość własną dla obciążenia $m = 10^3 \text{ kg}$.

Na rys. 4.16 przedstawiono wpływ całkowitej długości wysięgnika na pierwszą częstość własną dla różnych kątów nachylenia przy obciążeniu ładunkiem o masie 10^3 kg . Zauważono, że wraz ze wzrostem długości całkowitej wysięgnika maleją wartości pierwszej częstości własnej. Dla kątów poniżej 50° spadek wartości pierwszej częstości własnej jest zbliżony, natomiast dla wyższych wartości kąta nachylenia wysięgnika zaobserwowano duże różnice w dynamice spadku wartości pierwszej częstości własnej. Jakkolwiek całkowita długość wysięgnika nie miała wpływu na wartości drugich częstości własnych (rys. 4.17), które zależały jedynie od kąta nachylenia wysięgnika.

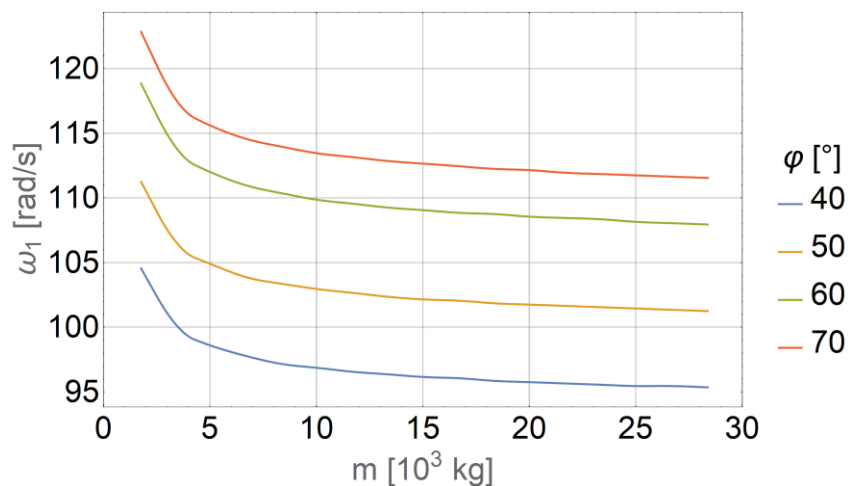


Rys. 4.16. Wpływ długości całkowitej wysięgnika na pierwszą częstość drgań dla wybranych wartości kąta nachylenia wysięgnika.

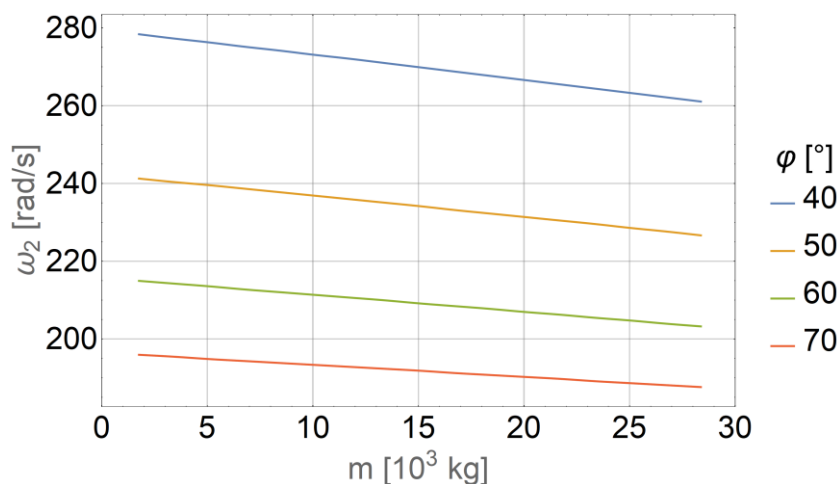


Rys. 4.17. Wpływ długości całkowitej na drugą częstość własną dla wybranych wartości kątów nachylenia wysięgnika.

Ostatnim analizowanym elementem w układzie bez tłumienia był wpływ masy ładunku obciążającego układ zmiany wysięgu żurawia samochodowego na pierwszą i drugą częstość własną (odpowiednio rys. 4.18 i 4.19).



Rys. 4.18. Wpływ masy ładunku obciążającego układ na pierwszą częstotliwość własną.



Rys. 4.19. Wpływ masy ładunku obciążającego układ na drugą częstotliwość własną.

Jak wynika z rys. 4.18 i 4.19 zwiększanie masy ładunku obniżało wartości pierwszej i drugiej częstotliwości drgań.

4.6 Wpływ tłumienia na wartości własne układu

W celu przeprowadzenia badań wpływu różnego rodzaju tłumienia na wartości własne układu zmiany wysięgu żurawia wprowadzono bezwymiarowe współczynniki tłumienia. Odpowiednio dla tłumienia wewnętrznego H_s , tłumienia zewnętrznego N_s i tłumienia konstrukcyjnego M_s jako

$$H_s = \frac{E_i^*}{E_i \sqrt{(l_1 + \sum_{i=3}^6 l_i)^4 \frac{\sum_{i=1}^6 \varrho_i A_i}{\sum_{i=1}^6 E_i J_i}}} \quad (4.143)$$

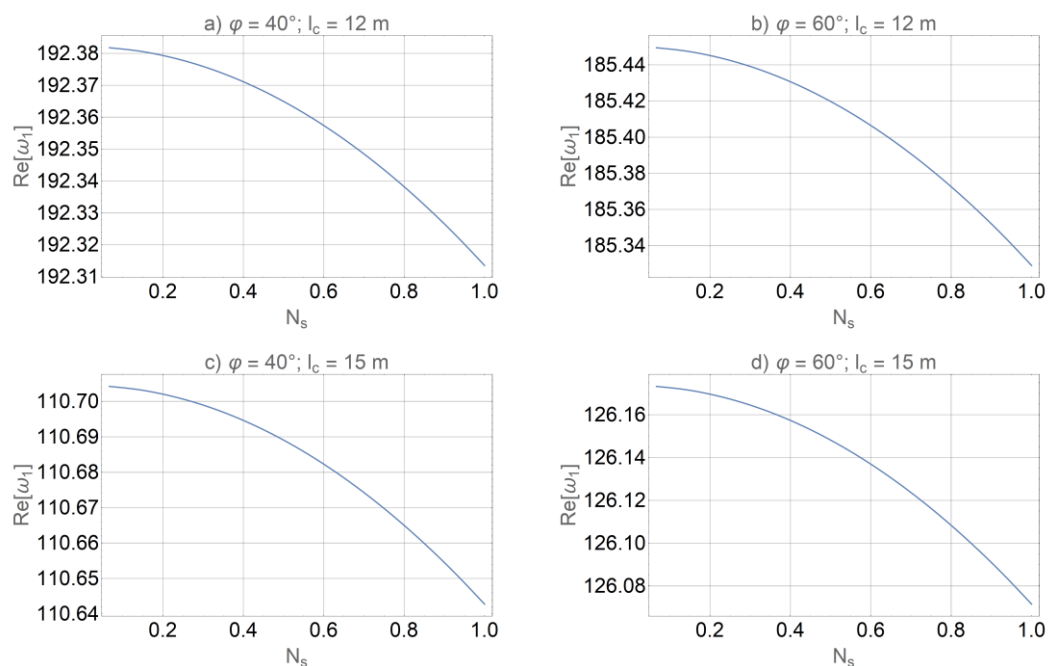
$$N_s = \frac{c_E}{\sqrt{\sum_{i=1}^6 \varrho_i A_i E_i J_i}} (l_1 + \sum_{i=3}^6 l_i)^2 \quad (4.144)$$

$$M_s = \frac{c_R}{\sqrt{(l_1 + \sum_{i=3}^6 l_i)^2 \sum_{i=1}^6 \varrho_i A_i E_i J_i}} \quad (4.145)$$

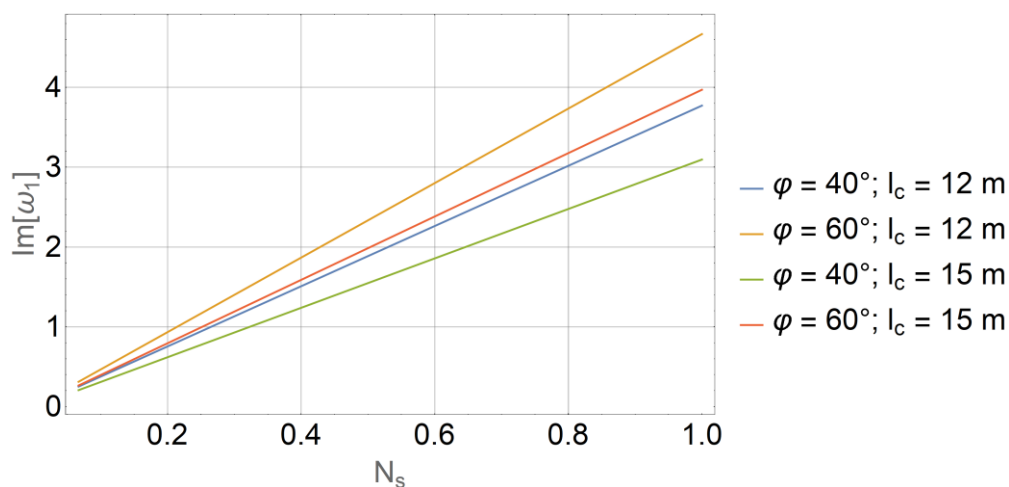
Na wstępie przeanalizowano wpływ tłumienia zewnętrznego N_s na części rzeczywistą (rys. 4.20) i urojoną (rys. 4.21) pierwszej wartości własnej dla masy ładunku 1000 kg i długości wysięgnika równych 15 m i 12 m. Analizę przeprowadzono dla dwóch wartości kąta nachylenia wysięgnika φ (40° i 60°).

Następnie przeprowadzona została analiza wpływu tłumienia wewnętrznego na wartości własne analizowanego układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego. Podobnie jak w rozdziale 3 analizę przeprowadzono dla bezwymiarowego współczynnika tłumienia opisanego wzorem (4.143) w zakresie $0 < H_s < 0,0001$ określonego na podstawie prac [183], [184], [185], [186]. Analizę przeprowadzono dla tych samych geometrii układu co w przypadku badania wpływu tłumienia zewnętrznego (rys. 4.22 i rys. 4.23).

Ostatnim analizowanym typem tłumienia było tłumienie konstrukcyjne M_s w podporach przegubowych wysięgnika i siłownika zmiany wysięgu w układzie zmiany wysięgu żurawia samochodowego. W badaniach założono, że tłumienie w obydwu podporach było jednakowe. Wynika z tego, że wartości współczynników tłumienia konstrukcyjnego dla obu tłumików rotacyjnych C_{R1} i C_{R2} zmieniano w tym samym zakresie. Podobnie jak w poprzednich przypadkach analizę przeprowadzono dla długości wysięgnika równej 15 m i 12 m. Wyniki badań dla tłumionej częstości drgań przedstawiono na rys. 4.24. Z kolei na rysunku 4.25 przedstawiono zmiany stopnia zaniku amplitud drgań pierwszej wartości własnej odpowiednio dla długości wysięgnika równej 15 m i 12 m.



Rys. 4.20. Wpływ tłumienia zewnętrznego na część rzeczywistą pierwszej wartości własnej.

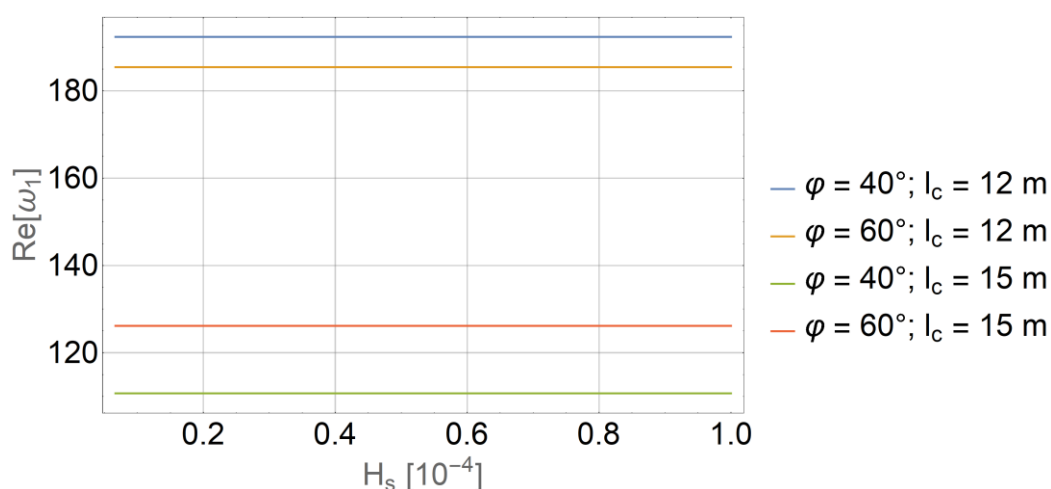


Rys. 4.21. Wpływ tłumienia zewnętrznego na część urojoną pierwszej wartości własnej.

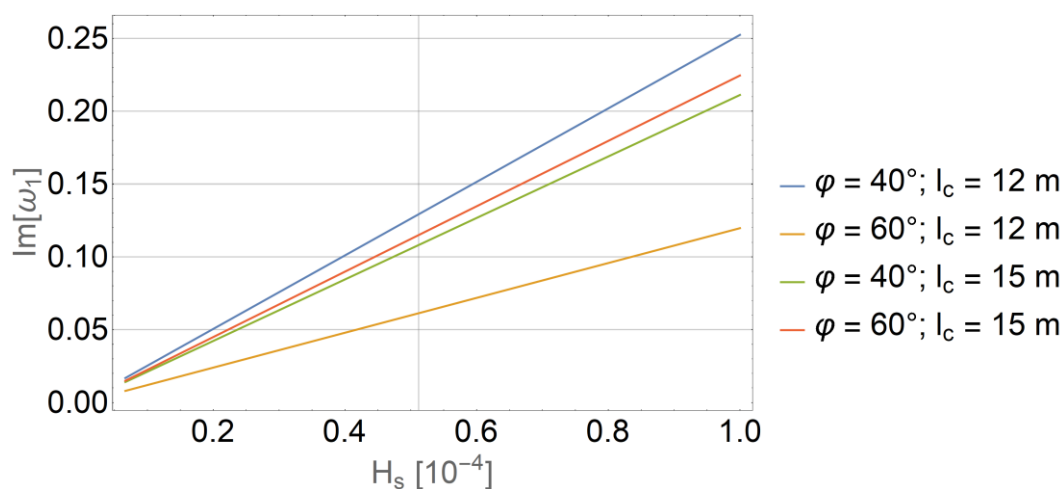
Części rzeczywiste pierwszej wartości własnej reprezentują tłumione częstotliwości drgań. Zostały one wyznaczone dla różnych kątów nachylenia wysięgnika i różnych długości jego wysunięcia (rys. 4.14). Wraz ze wzrostem tłumienia

zewnętrznego następuje nieznaczny spadek tłumionej częstości drgań układu. Dla wyższych wartości kąta nachylenia wysięgnika φ dynamika spadku wartości pierwszej częstości tłumionej była większa.

Wraz ze wzrostem tłumienia zewnętrznego wzrastała część urojona pierwszej wartości własnej związana ze stopniem zaniku amplitudy drgań. Tłumienie drgań zwiększało się wraz ze wzrostem kąta nachylenia wysięgnika φ . Należy zauważyć, że stopień zaniku amplitud drgań układu był większy dla mniejszej długości wysięgnika co związane było z większą sztywnością układu.



Rys. 4.22. Wpływ tłumienia wewnętrznego na część rzeczywistą pierwszej wartości własnej.

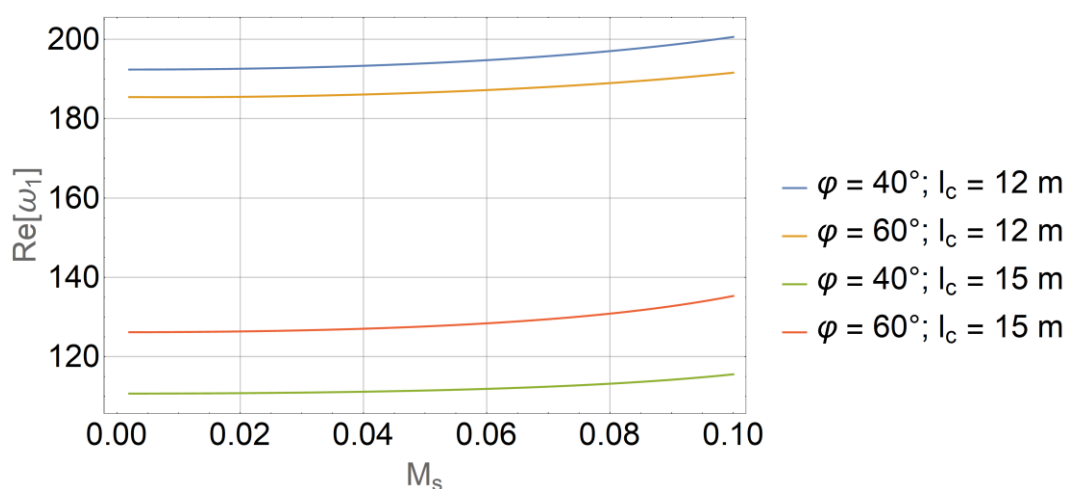


Rys. 4.23. Wpływ tłumienia wewnętrznego na część urojoną pierwszej wartości własnej.

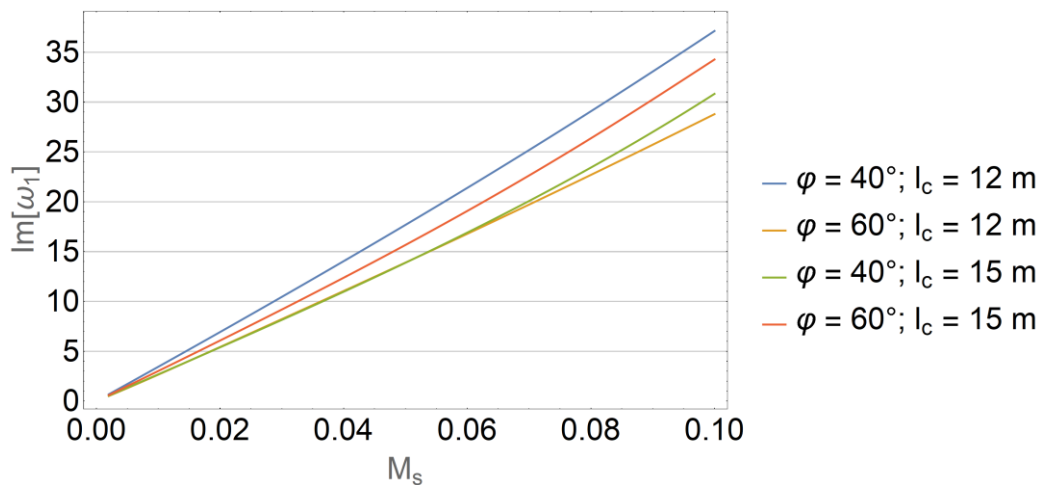
Przedstawiona na rys. 4.22 część rzeczywista pierwszej wartości własnej (tłumiona częstość drgań układu), przedstawiona odpowiednio dla długości wysięgnika równych 15 m i 12 m, wraz ze wzrostem tłumienia wewnętrznego zmieniała się nieznacznie.

Wraz ze wzrostem wartości tłumienia wewnętrznego liniowo wzrastała część urojona pierwszej wartości własnej analizowanego układu (rys. 5.23).

Jak wynika z przedstawionych wyników badań tłumienie wewnętrzne wpływało na wartości własne układu w znacznie mniejszym stopniu niż tłumienie zewnętrzne.



Rys. 4.24. Wpływ tłumienia konstrukcyjnego na część rzeczywistą pierwszej wartości własnej.



Rys. 4.25. Wpływ tłumienia konstrukcyjnego na część urojoną pierwszej wartości własnej.

Pierwsza częstość tłumiona zwiększała swoje wartości wraz ze wzrostem tłumienia dla wszystkich analizowanych przypadków (rys. 4.24). Stopień zaniku amplitud drgań dla pierwszej wartości własnej wraz ze wzrostem bezwymiarowego współczynnika tłumienia konstrukcyjnego we wszystkich analizowanych przypadkach zwiększał swoją wartość (rys. 4.25). Ze wszystkich analizowanych przypadków tłumienia największy wpływ na stopień zaniku amplitudy drgań, w analizowanych zakresach wartości tłumienia, wykazywało tłumienie konstrukcyjne.

4.7 Wpływ tłumienia na stateczność dynamiczną układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego

Jeżeli ładunek obciążający żuraw zostanie poderwany lub nagle zatrzymany w czasie jego opuszczania spowoduje to powstanie zmiennej w czasie siły zewnętrznej $P(t)$ określonej równaniem (4.1), w której skład wchodzi stała P_0 i zmienna S część obciążenia. Obie składowe zależą od kąta nachylenia wysięgnika φ . Na składową stałą wpływa masa m zwieszzonego ładunku, która razem ze sztywnością zastępczą układu linowego, określoną równaniem (4.131), determinuje również częstość drgań siły wymuszającej (równanie 4.132). Część zmienna obciążenia S jest związana ze sztywnością układu linowego k_z ,

prędkością opuszczania lub podnoszenia ładunku v_0 oraz częstością wymuszenia ν i jest opisana równaniem (4.133).

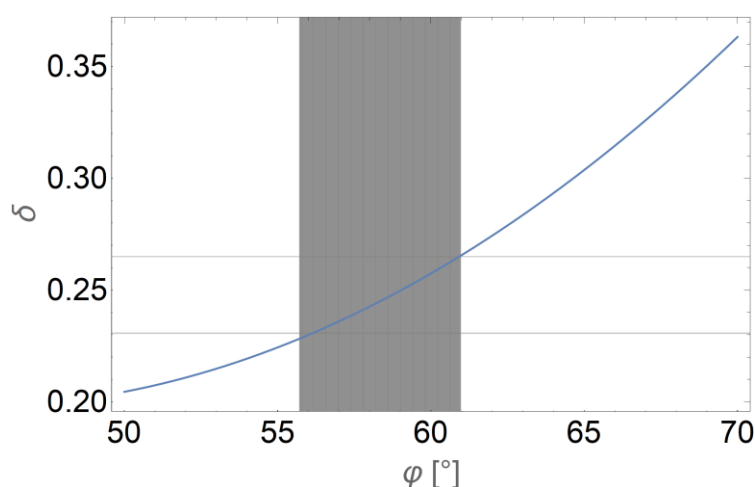
Równanie ruchu dla układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego (4.93) przedstawione w formie tłumionego równania Mathieu (4.94) pozwala na określenie stateczności dynamicznej analizowanego modelu. Para parametrów δ i ϵ zdefiniowanych odpowiednio równaniami (4.96) i (4.97) pozwala na określenie czy dana konfiguracja układu należy do obszaru rozwiązań statecznych lub czy zachodzi zjawisko rezonansu parametrycznego. Najistotniejszy wpływ na wartość parametru δ ma częstość siły wymuszającej ν oraz wartość pierwszej częstości własnej ω . Układ jest najmniej stabilny gdy wartość parametru δ jest w przybliżeniu równa 0,25, co przedstawiono na rys. 3.2. Na wartość parametru δ wpływa również tłumienie zewnętrzne C_E oraz tłumienie wewnętrzne E_i^* . Te same tłumienia wpływają na zmniejszenie obszarów niestatecznych, przedstawione na rys. 3.2, poprzez zwiększenie wartości współczynnika c opisanego równaniem (4.95). Za wartość współczynnika ϵ opisanego równaniem (4.97) odpowiadają głównie częstość wymuszenia ν oraz wartość części zmiennej obciążenia S . Tłumienie konstrukcyjne nie wpływa na zawężenie obszarów rozwiązań niestatecznych na karcie Strutta.

Tabela 4.2 Stateczność dynamiczna wybranych konfiguracji geometrycznych nietłumionego układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego.

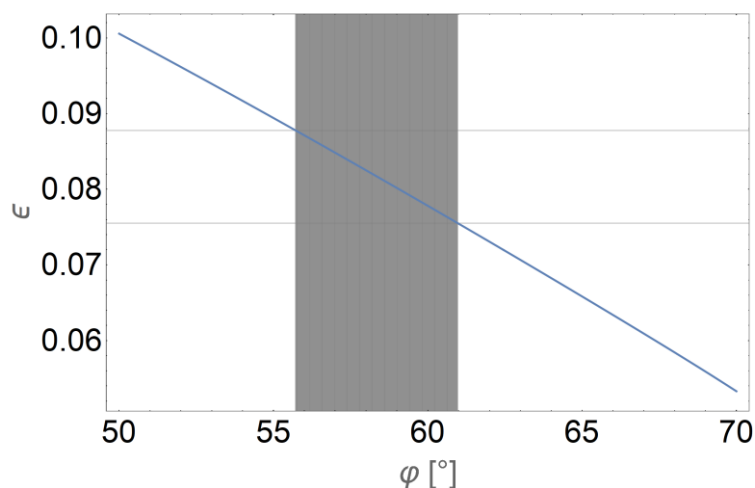
l_c	φ	δ	ϵ	ν	ω	Rozwiązanie
12	40°	0,661068	0,069532	263,815	214,357	stateczne
12	60°	0,667246	0,015016	263,815	215,461	stateczne
15	40°	0,169220	0,121197	261,314	107,415	stateczne

15	60°	0,257087	0,077815	261,314	132,620	niestateczne
----	-----	----------	----------	---------	---------	--------------

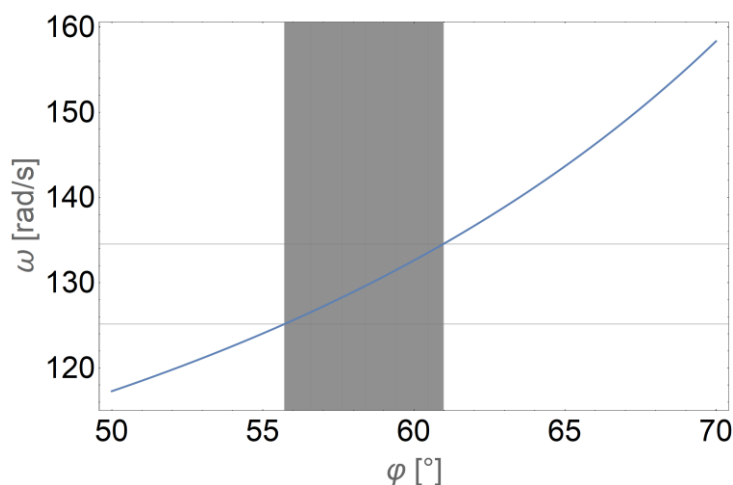
Na wstępie przeprowadzona została analiza stateczności dynamicznej nietłumionego układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego przy obciążeniu masą $m = 3000 \text{ kg}$, prędkości poderwania ładunku $v_0 = 0,14 \text{ m/s}$ oraz przy długości olinowania od głowicy wysięgnika do zblocza równej $l_l = 4 \text{ m}$. Wyznaczone zostały wartości parametrów równania Mathieu determinujące stateczność dynamiczną rozwiązania dla analizowanych w podrozdziale 4.6 konfiguracji geometrycznych układu (tabela 4.2). Dla przyjętego obciążenia i długości liny w jednym przypadku ($l_c = 15 \text{ m}$ i $\varphi = 60^\circ$) zaobserwowano występowanie zjawiska rezonansu parametrycznego. Następnie przeprowadzono badanie zakresu rozwiązań niestatecznych tej konfiguracji dla kątów z przedziału od 50° do 70° . Na rysunkach 4.26, 4.27 i 4.28 przedstawiono odpowiednio wartości parametrów δ i ϵ oraz częstości własnej ω w zależności od kąta nachylenia wysięgnika φ . Szarym kolorem zaznaczono zakres kątów (od $55,72^\circ$ do $60,98^\circ$), dla których rozwiązanie równania Mathieu było niestateczne. Podobnie jak w przypadku kąta nachylenia wysięgnika przeprowadzona została analiza wpływu masy ładunku na wartości parametrów δ (rys. 4.29) i ϵ (rys. 4.30) równania Mathieu, a co za tym idzie ich wpływ na stateczność układu oraz na pierwszą częstość własną (rys. 4.31).



Rys. 4.26. Wpływ kąta nachylenia wysięgnika na wartość parametru δ z zaznaczonym zakresem kątów dla rozwiązań niestatecznych.

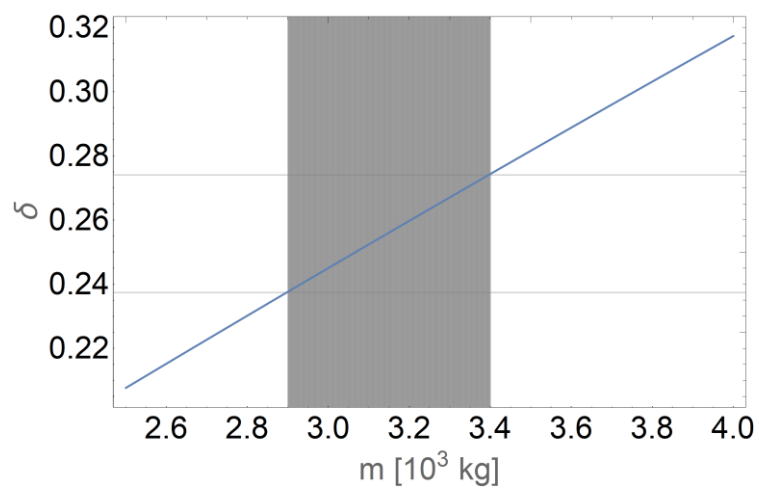


Rys. 4.27. Wpływ kąta nachylenia wysięgnika na wartość parametru ϵ z zaznaczonym zakresem kątów dla rozwiązań niestatecznych.

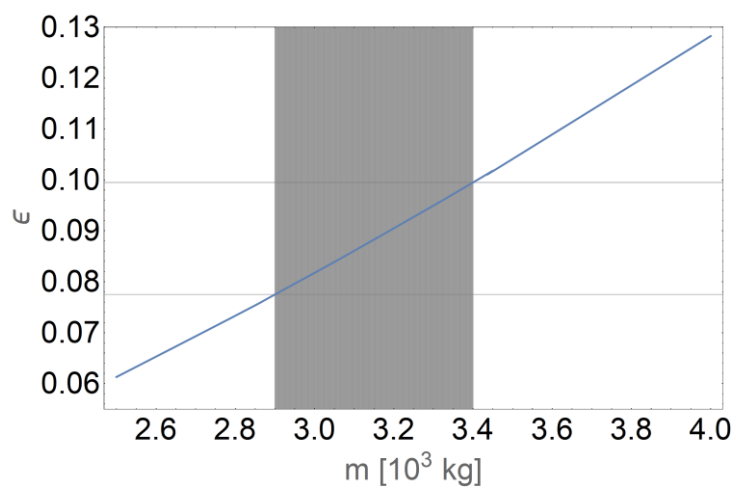


Rys. 4.28. Wpływ kąta nachylenia wysięgnika na wartość pierwszej częstości własnej z zaznaczonym zakresem kątów dla rozwiązań niestatecznych.

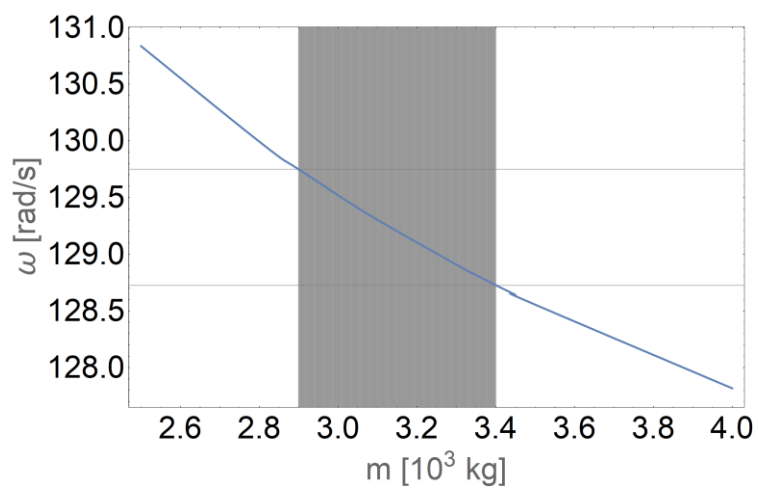
Wraz ze wzrostem kąta nachylenia wysięgnika wzrastała wartość parametru δ (rys. 4.26) oraz wartość pierwszej częstości własnej ω (rys. 4.28), natomiast malała wartość parametru ϵ (rys. 4.27). Zakres wartości parametru δ odpowiadał zakresowi pierwszego obszaru niestatecznego przestrzeni rozwiązań równania Mathieu. Środek obszaru niestatecznego występował dla kąta $\varphi = 58,3^\circ$ i został przyjęty w dalszej analizie układu.



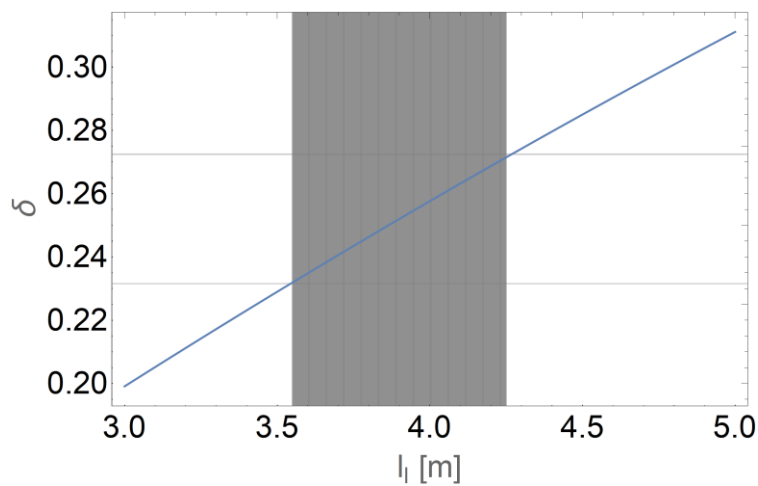
Rys. 4.29. Wpływ masy ładunku na wartość parametru δ z zaznaczonym zakresem masy ładunku dla rozwiązań niestatecznych.



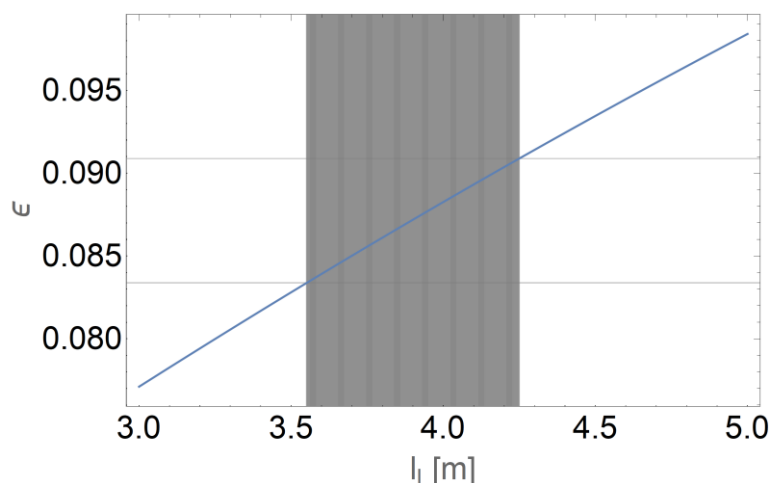
Rys. 4.30. Wpływ masy ładunku na wartość parametru ϵ z zaznaczonym zakresem masy ładunku dla rozwiązań niestatecznych.



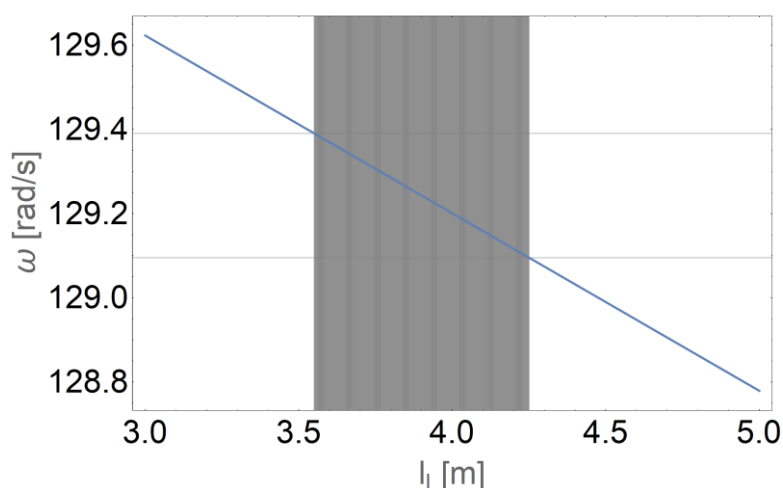
Rys. 4.31. Wpływ masy ładunku na wartość pierwszej częstości własnej z zaznaczonym zakresem masy ładunku dla rozwiązań niestatecznych.



Rys. 4.32. Wpływ długości liny na wartość parametru δ z zaznaczonym zakresem długości liny dla rozwiązań niestatecznych.



Rys. 4.33. Wpływ długości liny na wartość parametru ϵ z zaznaczonym zakresem długości liny dla rozwiązań niestatecznych.



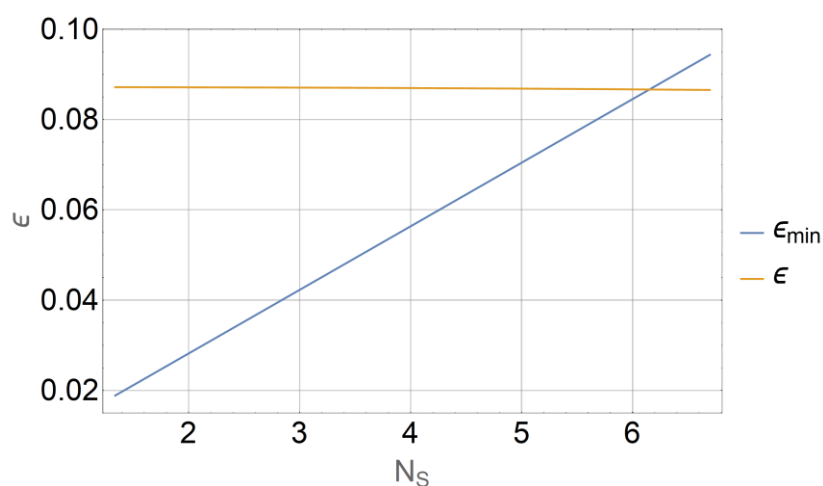
Rys. 4.34. Wpływ długości liny na wartość pierwszej częstotliwości własnej z zaznaczonym zakresem długości liny dla rozwiązań niestatecznych.

Wraz ze wzrostem masy ładunku zaobserwowano liniowy wzrost wartości parametrów δ i ϵ . Wartość pierwszej częstotliwości własnej ω wraz ze wzrostem masy ładunku malała. Rezonans parametryczny zaobserwowano dla wartości masy ładunku od 2900 kg do 3400 kg. Środek obszaru niestatecznego występował dla wartości parametru $\delta = 0,2557$ przy masie ładunku równej $m = 3150 \text{ kg}$ i tą wartość masy ładunku przyjęto przy analizie wpływu długości liny na wartości odpowiednich parametrów równania Mathieu (rys. 4.32 i rys. 4.33) i wartość pierwszej częstotliwości własnej (rys. 4.34). Wraz ze wzrostem długości liny wartości

parametrów δ i ϵ rosły, a wartość pierwszej częstości własnej malała.

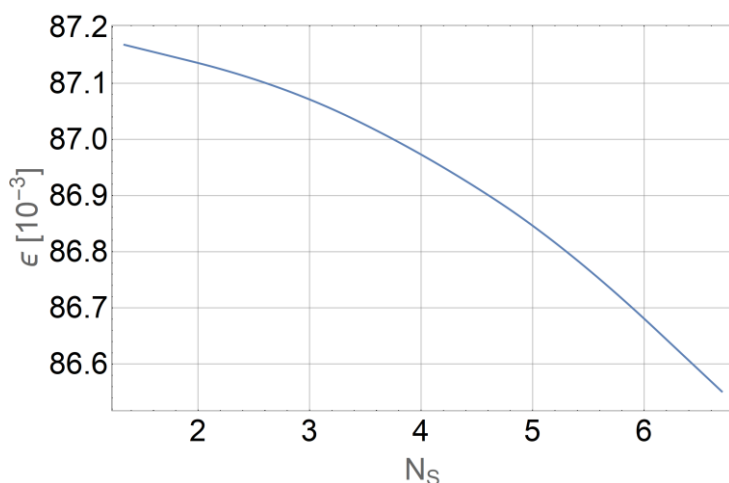
Zaobserwowano obszar niestateczny w zakresie długości liny od 3,55 m do 4,25 m, którego środek przypadał na długość liny równą 3,9 m.

Ostatnim etapem przeprowadzonych badań było określenie wpływu różnych rodzajów tłumienia na stateczność dynamiczną układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego. Otrzymany niestateczny układ dla wybranych wartości kąta pracy, masy ładunku i długości liny poddano wpływowi tłumienia zewnętrznego (rys. 4.35).



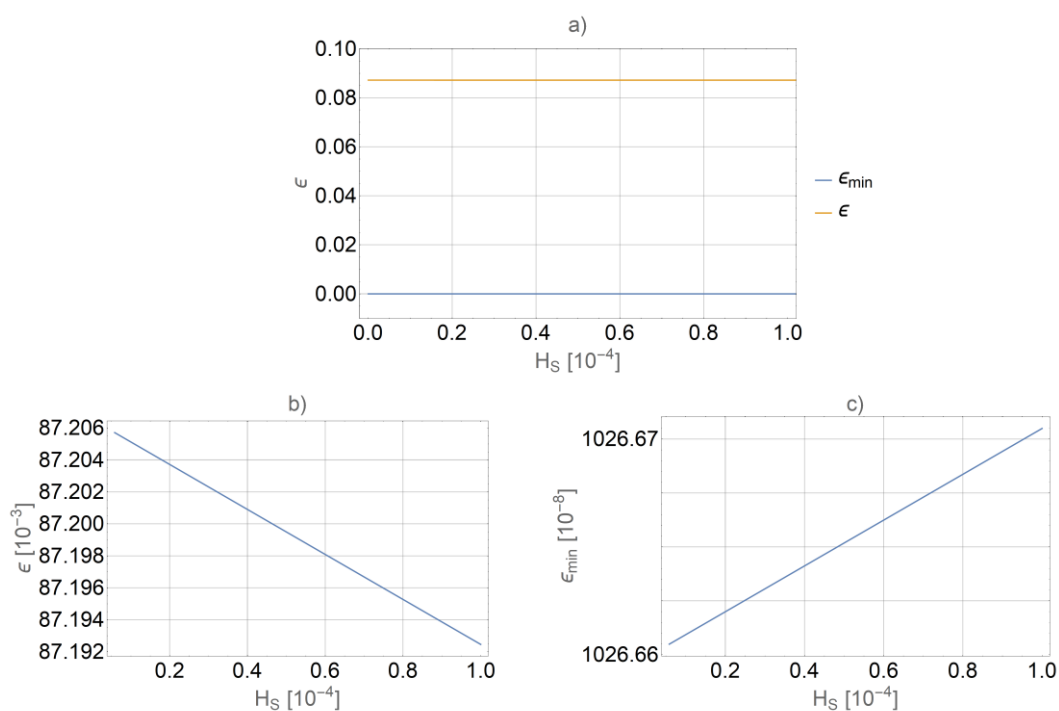
Rys. 4.35. Wpływ tłumienia zewnętrznego na wartość parametru ϵ oraz na wartość minimum obszaru niestatecznego $\epsilon_{\min}$.

Wpływ tłumienia zewnętrznego na wartość parametru ϵ przedstawiono na rys. 4.36.



Rys. 4.36. Wpływ tłumienia zewnętrznego na wartość parametru ϵ .

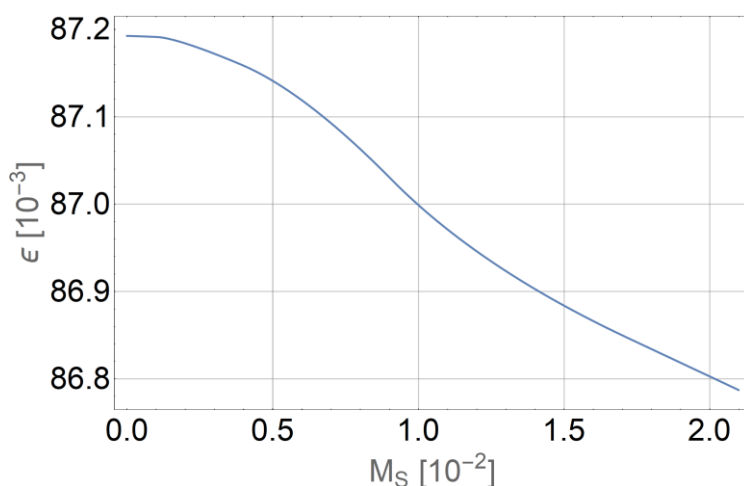
Wraz ze wzrostem współczynnika tłumienia zewnętrznego N_S zaobserwowano nieznaczne zwiększenie stateczności układu poprzez zmniejszenie wartości parametru ϵ (rys. 4.36), natomiast znacznie większy wpływ na zakres rozwiązań niestatecznych miało zwiększenie wartości współczynnika tłumienia c opisanego równaniem (4.95) (następowało zawężanie obszarów niestatecznych – wzrost wartości $\epsilon_{\min}$). Dla wartości współczynnika tłumienia zewnętrznego $N_S = 6,15$ nastąpiło przecięcie krzywych i układ z niestatecznego stał się stateczny.



Rys. 4.37. Wpływ tłumienia wewnętrznego na a), b) wartość parametru ϵ oraz na a), c) wartość minimum obszaru niestatecznego $\epsilon_{\min}$.

Uwzględnienie tłumienia wewnętrznego H_s (rys. 4.37) w nieznacznym stopniu zmniejszyło wartość współczynnika ϵ (rys. 4.37b) i zwiększyło wartość $\epsilon_{\min}$ (rys. 4.37c) jednak nie wpłynęło to znacząco na stateczność dynamiczną układu.

Kolejnym analizowanym przypadkiem tłumienia, które wpływało na stateczność badanego układu było tłumienie konstrukcyjne. Wpływ tego rodzaju tłumienia na wartość parametru ϵ w równaniu Mathieu przedstawiono na rys. 4.38.

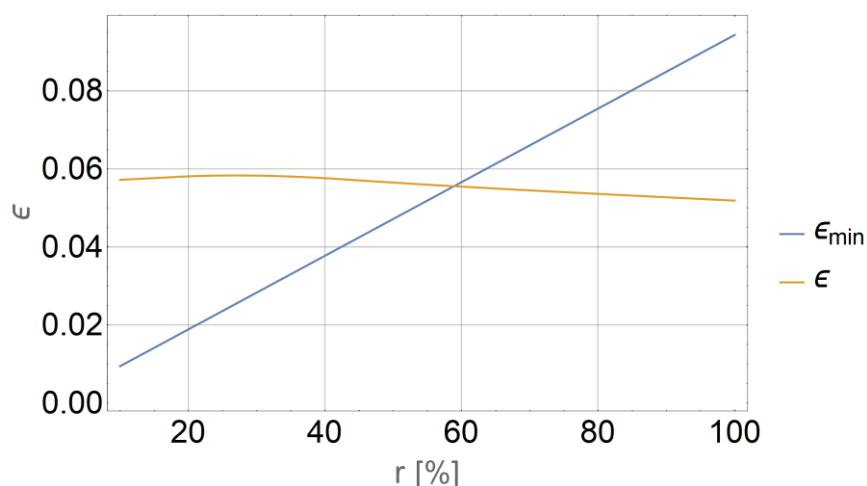


Rys. 4.38. Wpływ tłumienia konstrukcyjnego na wartość parametru ϵ .

Tłumienie konstrukcyjne M_s podobnie jak tłumienie zewnętrzne obniżało wartość parametru ϵ (rys. 4.38) zwiększając w pewnym stopniu stateczność układu, lecz nie eliminowało możliwości wystąpienia zjawiska rezonansu parametrycznego ponieważ nie wpływało na wartość współczynnika tłumienia c i nie zmniejszało zakresu obszarów niestatecznych ($\epsilon_{\min} = 0$).

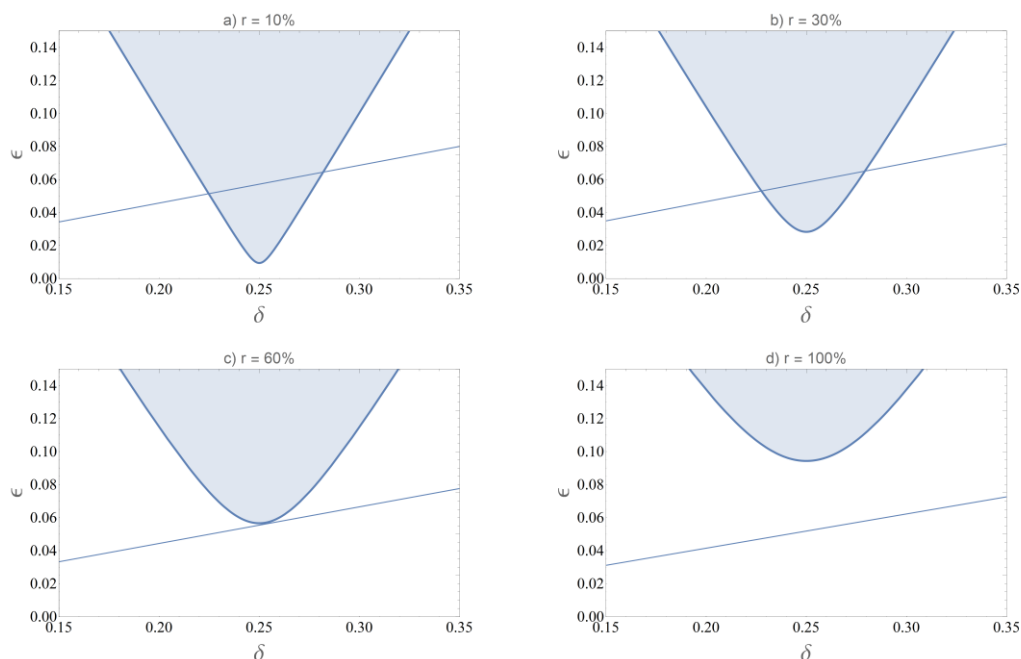
W ostatnim badanym przypadku uwzględniono wpływ wszystkich trzech rodzajów tłumienia (wewnętrznego, zewnętrznego i konstrukcyjnego) na stateczność dynamiczną analizowanego układu. W trakcie badań tłumienie wewnętrzne miało stałą wartość odpowiednią dla stali ($H_s = 0,49 \cdot 10^{-4}$). Wartości tłumienia

konstrukcyjnego i zewnętrznego były zwiększane proporcjonalnie, aż do osiągnięcia maksymalnych przyjętych w pracy wartości tłumień (odpowiednio $M_S = 2,1 \cdot 10^{-2}$ i $N_S = 6,7$). Parametrem określającym proporcje przyjmowanych tłumień w stosunku do ich maksymalnych wartości określa parametr proporcjonalności r . Wyniki badań wpływu wszystkich rodzajów tłumienia na wartość parametru ϵ z równania Mathieu w relacji do wartości minimum obszaru niestatecznego $\epsilon_{\min}$ przedstawiono na rys. 4.39.



Rys. 4.39. Wpływ tłumienia wewnętrznego, zewnętrznego i konstrukcyjnego na wartość parametru ϵ oraz na wartość minimum obszaru niestatecznego $\epsilon_{\min}$.

Wraz ze wzrostem parametru r , zmniejszała się wartość parametru ϵ i jednocześnie zwiększała się wartość minimum pierwszego obszaru niestatecznego $\epsilon_{\min}$. Podobnie jak na rys. 4.35 nastąpiło przecięcie krzywych, które występowało dla wartości $r = 58,87$ %, co odpowiadało tłumieniu konstrukcyjnemu $M_S = 1,23 \cdot 10^{-2}$ oraz tłumieniu zewnętrznemu $N_S = 3,94$.



Rys. 4.40. Wpływ tłumienia wewnętrznego, zewnętrznego i konstrukcyjnego na zakres rozwiązań statecznych analizowanego układu.

Jak można zauważyć uwzględnienie wszystkich trzech rodzajów tłumień przesunęło punkt przecięcia krzywych ϵ i $\epsilon_{\min}$ powodując wcześniejsze przejście rozwiązań w obszary stateczne. Bardziej obrazowe przedstawienie wpływu tłumienia wewnętrznego, zewnętrznego i konstrukcyjnego na zakres rozwiązań statecznych analizowanego układu zostało zaprezentowane na rysunkach 4.40a–4.40d.

4.8 Podsumowanie

W niniejszym rozdziale sformułowano i rozwiązano zagadnienia brzegowe dla układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego z uwzględnieniem tłumienia na przykładzie rzeczywistego układu zmiany wysięgu dźwigu samochodowego DST0285 modelowanego z wykorzystaniem belek Bernoulligo–Eulera i wybranych elementów dyskretnych. Korzystając z zasady wariacyjnej Hamiltona wyznaczono równanie ruchu układu oraz biorąc pod uwagę warunki geometryczne i ciągłości wyznaczono naturalne warunki brzegowe. Po określeniu warunku ortogonalności

funkcji własnych przekształcono równanie ruchu do postaci równania Mathieu, którego parametry umożliwiały określenie zakresu rozwiązań statecznych układu.

W trakcie analizy wpływu geometrii i obciążenia na częstotliwości własne układu nietłumionego wykazano, że wraz ze wzrostem kąta nachylenia wysięgnika φ wartości pierwszej częstotliwości własnej wzrastały, osiągały maksimum, po czym spadały by dla wartości kąta 80° osiągnąć zbliżone wartości (rys. 4.12 i rys. 4.14), natomiast wartości drugiej częstotliwości własnej spadały wraz ze wzrostem kąta nachylenia (rys. 4.13 i rys. 4.15). Wraz ze wzrostem długości całkowitej wysięgnika zmniejszały się wartości pierwszej częstotliwości drgań (rys. 4.16), natomiast dla wartości drugiej częstotliwości drgań w badanym zakresie nie zaobserwowano istotnych zmian (rys. 4.17). Zwiększanie masy ładunku obniżało wartości pierwszej (rys. 4.18) i drugiej częstotliwości własnej (rys. 4.19).

Wprowadzenie tłumienia zewnętrznego do układu spowodowało nieznaczny spadek części rzeczywistej (tłumionej częstotliwości drgań) pierwszej wartości własnej (rys. 4.20). Wzrost tłumienia zewnętrznego powodował wzrost wartości części urojonej pierwszej wartości własnej (rys. 4.21) związanej ze stopniem zaniku amplitudy drgań. Stopień zaniku amplitudy drgań zwiększał się wraz ze wzrostem kąta nachylenia wysięgnika φ . Uwzględnienie tłumienia wewnętrznego nie wpływało znacząco na część rzeczywistą pierwszej wartości własnej (rys. 4.22) powodując jednocześnie wzrost jej części urojonej (rys. 4.23). Zwiększanie tłumienia konstrukcyjnego zwiększało wartości części rzeczywistej pierwszej wartości własnej (rys. 4.24) oraz jej części urojonej (rys. 4.25).

Po wyznaczeniu parametrów równania Mathieu (tabela 4.2) dla wybranych geometrii analizowanego układu określono, dla jakich przypadków występowało zjawisko rezonansu parametrycznego. Utrata stateczności wystąpiła dla długości ramienia wysięgnika równej 15 m i przy kącie nachylenia ramienia 60° . Następnie przeanalizowano zakres występowania zjawiska rezonansu parametrycznego analizowanego układu dla różnych wartości kąta nachylenia (rys. 4.26–4.28), masy ładunku (rys. 4.29–4.31) i długości liny (4.32–4.34). Pozwoliło to na takie dobranie tych parametrów, aby określić układ możliwie „najbardziej” niestateczny.

Dla otrzymanego układu badano wartość parametru ϵ dla pierwszego obszaru niestatecznego ($\delta = 0,25$) przy trzech różnych rodzajach tłumienia. Wzrost wartości współczynnika tłumienia zewnętrznego N_S powodował nieznaczne zwiększenie stateczności układu poprzez zmniejszenie wartości parametru ϵ (rys. 4.36), jednocześnie następowało zwiększenie wartości minimum obszaru niestatecznego $\epsilon_{\min}$ (rys. 4.35). Układ stał się stateczny dla współczynnika tłumienia zewnętrznego równego $N_S = 6,15$. Tłumienie wewnętrzne H_S (rys. 4.37) nie wpłynęło znacząco na stateczność układu. Tłumienie konstrukcyjne M_S obniżało wartość parametru ϵ (rys. 4.38), lecz nie eliminowało możliwości wystąpienia zjawiska rezonansu parametrycznego, ponieważ nie zmniejszało zakresu obszarów niestatecznych. Uwzględnienie trzech rodzajów tłumienia bardziej stabilizowało układ. Stawał się on stateczny dla wartości tłumienia zewnętrznego $N_S = 3,94$ oraz tłumienia konstrukcyjnego $M_S = 1,23 \cdot 10^{-2}$, co odpowiadało $r = 58,87 \%$ (rys. 4.39). Każde dalsze zwiększanie tłumień powodowało, że rozwiązania stateczności dynamicznej układu były stateczne. Rozwiązania te znajdowały się w całości w obszarach rozwiązań statecznych na karcie Strutta (rys. 4.40).

5 Wnioski i uwagi końcowe

Celem niniejszej dysertacji było modelowanie i analiza stateczności dynamicznej układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego z uwzględnieniem wpływu różnego rodzaju tłumienia drgań na jego stateczność dynamiczną.

Osiągnięcie założonego celu głównego pracy wiązało się z realizacją etapów badawczych, w ramach których:

1. przedstawiono zastosowaną w pracy metodykę badania drgań i stateczności dynamicznej przy uwzględnieniu tłumienia na przykładzie prostego układu – belki Bernoulliego-Eulera,
2. zamodelowano układ zmiany wysięgu żurawia samochodowego przy uwzględnieniu tłumienia wewnętrznego, zewnętrznego i konstrukcyjnego tworząc model fizyczny układu dla którego określono sztywność zastępczą wysięgnika, jego masę zastępczą, sztywność zastępczą cieczy w siłowniku zmiany wysięgu oraz modelując układ linowy,
3. przeprowadzono badania drgań i stateczności dynamicznej tłumionego układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego.

Na podstawie przeprowadzonych badań sformułowano następujące wnioski:

1. uwzględnienie w modelu stateczności dynamicznej prostego układu w postaci belki jak i układu zmiany wysięgu żurawia tłumienia konstrukcyjnego, zwiększało stateczność takich układów, jednak nie eliminowało możliwości wystąpienia rezonansu parametrycznego,
2. uwzględnienie w badanych układach tłumienia ośrodka zmniejszało obszary rozwiązań niestatecznych,
3. zwiększanie wartości współczynnika tłumienia zewnętrznego powyżej określonej wartości granicznej powoduje, że układy w całym analizowanym zakresie będą miały rozwiązania stateczne,

4. tłumienie wewnętrzne dla rzeczywistych wartości współczynnika tłumienia wewnętrznego stali nie wprowadzało znaczących zmian stateczności dynamicznej w stosunku do układów nietłumionych,
5. jednoczesne uwzględnienie wszystkich analizowanych rodzajów tłumienia znacząco wpłynęło na możliwość uzyskania rozwiązań statecznych badanych układów. Rozwiązania te przy tych samych parametrach geometrycznych i obciążenia układów, w których uwzględniono pojedyncze rodzaje tłumienia, wcześniej osiągały obszar rozwiązań statecznych.

Na podstawie przeprowadzonych w niniejszej dysertacji badań i wynikających z nich wniosków można stwierdzić prawdziwość postawionej w pracy tezy. Wykazano, że uwzględnienie tłumienia w układzie zmiany wsięgu żurawia samochodowego nie eliminuje możliwości występowania zjawiska rezonansu parametrycznego, choć znacząco zmniejsza obszar rozwiązań niestatecznych.

Kolejnym etapem planowanych prac jest identyfikacja obszarów niestatecznych w całym zakresie pracy układu zmiany wsięgu żurawia samochodowego, poszukiwanie korelacji między rozwiązaniami niestatecznymi a geometrią układu, zbadanie wpływu tłumienia na zidentyfikowane obszary występowania zjawiska rezonansu parametrycznego, poszukiwanie optymalnych parametrów analizowanych rodzajów tłumienia pozwalających na eliminację większości lub wszystkich obszarów niestatecznych z zakresu pracy i obciążenia maszyny oraz eksperymentalna weryfikacja wyników prac teoretycznych.

Literatura

- [1] W. Szemplińska-Stupnicka, „Zastosowanie parametrycznych równań różniczkowych w mechanice i technice”, *Pr. IPPT - IFTR Rep.*, nr 1, s. 1–59, 1975.
- [2] „On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces”, *Abstr. Pap. Print. Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, t. 3, s. 49–51, grudz. 1837, doi: 10.1098/rspl.1830.0024.
- [3] N. M. Beliaev, „Stability of prismatic rods subjected to variable longitudinal forces”, *Collect. Pap. Eng Constr. Struct Mech Put Leningr.*, s. 149–167, 1924.
- [4] R. A. Ibrahim, *Parametric random vibration*, Dover ed. Mineola, N.Y: Dover Publications, 2007.
- [5] R. A. Ibrahim i A. D. S. Barr, „Parametric Vibration: Part I: Mechanics of Linear Problems”, *Shock Vib. Dig.*, t. 10, nr 1, s. 15–29, sty. 1978, doi: 10.1177/058310247801000105.
- [6] R. M. Evan – Iwanowski, „On the parametric response of structures”, *Appl. Mech. Rev.*, nr 18, s. 699–702, 1965.
- [7] G. J. Simitses, „Instability of Dynamically-Loaded Structures”, *Appl. Mech. Rev.*, t. 40, nr 10, s. 1403–1408, paź. 1987, doi: 10.1115/1.3149542.
- [8] B. C. Nakra, „Vibration control with viscoelastic materials”, *Shock Vib. Dig.*, t. 8, s. 3–12, 1976.
- [9] B. C. Nakra, „Vibration control with viscoelastic materials-II”, *Shock Vib. Dig.*, t. 13, s. 17–20, 1981.
- [10] B. C. Nakra, „Vibration control with viscoelastic materials-III”, *Shock Vib. Dig.*, t. 16, s. 17–22, 1984.

- [11] B. C. Nakra, „VIBRATION CONTROL IN MACHINES AND STRUCTURES USING VISCOELASTIC DAMPING”, *J. Sound Vib.*, t. 211, nr 3, s. 449–466, kwi. 1998, doi: 10.1006/jsvi.1997.1317.
- [12] E. Mettler, „Schmidt, G., Parametererregte Schwingungen, Berlin. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1975. 313 S., 55 Abb., M 62,- .”, *ZAMM - Z. Für Angew. Math. Mech.*, t. 57, nr 2, s. 127–128, 1977, doi: 10.1002/zamm.19770570216.
- [13] V. V. Bolotin i H. L. Armstrong, „The Dynamic Stability of Elastic Systems”, *Am. J. Phys.*, t. 33, nr 9, s. 752–753, wrz. 1965, doi: 10.1119/1.1972245.
- [14] A. H. Nayfeh i D. T. Mook, *Nonlinear oscillations*, Wiley classics library ed. 1995, [Nachdr.]. w Physics textbook. Weinheim: Wiley, 2004.
- [15] K. K. Stevens, „On the parametric excitation of a viscoelastic column.”, *AIAA J.*, t. 4, nr 12, s. 2111–2116, grudz. 1966, doi: 10.2514/3.3863.
- [16] C. S. Hsu, „Further Results on Parametric Excitation of a Dynamic System”, *J. Appl. Mech.*, t. 32, nr 2, s. 373–377, cze. 1965, doi: 10.1115/1.3625809.
- [17] C. S. Hsu, „On the Parametric Excitation of a Dynamic System Having Multiple Degrees of Freedom”, *J. Appl. Mech.*, t. 30, nr 3, s. 367–372, wrz. 1963, doi: 10.1115/1.3636563.
- [18] H. Saito i K. Otomi, „Parametric response of viscoelastically supported beams”, *J. Sound Vib.*, t. 63, nr 2, s. 169–178, mar. 1979, doi: 10.1016/0022-460X(79)90874-5.
- [19] K. Takahashi, „An approach to investigate the instability of the multiple-degree-of-freedom parametric dynamic systems”, *J. Sound Vib.*, t. 78, nr 4, s. 519–529, paź. 1981, doi: 10.1016/S0022-460X(81)80122-8.
- [20] J. Zajackowski, „An approximate method of analysis of parametric vibration”, *J. Sound Vib.*, t. 79, nr 4, s. 581–588, grudz. 1981, doi: 10.1016/0022-460X(81)90468-5.

- [21] J. Zajączkowski i J. Lipiński, „Vibrations of parametrically excited systems”, *J. Sound Vib.*, t. 63, nr 1, s. 1–7, mar. 1979, doi: 10.1016/0022-460X(79)90372-9.
- [22] S. L. Lau, Y. K. Cheung, i S. Y. Wu, „A Variable Parameter Incrementation Method for Dynamic Instability of Linear and Nonlinear Elastic Systems”, *J. Appl. Mech.*, t. 49, nr 4, s. 849–853, grudz. 1982, doi: 10.1115/1.3162626.
- [23] J. E. Brown, J. M. Hutt, i A. E. Salama, „Finite element solution to dynamic stability of bars.”, *AIAA J.*, t. 6, nr 7, s. 1423–1425, lip. 1968, doi: 10.2514/3.4779.
- [24] B. A. H. Abbas, „Dynamic stability of a rotating Timoshenko beam with a flexible root”, *J. Sound Vib.*, t. 108, nr 1, s. 25–32, lip. 1986, doi: 10.1016/S0022-460X(86)80308-X.
- [25] B. A. H. Abbas i J. Thomas, „Dynamic stability of Timoshenko beams resting on an elastic foundation”, *J. Sound Vib.*, t. 60, nr 1, s. 33–44, wrz. 1978, doi: 10.1016/0022-460X(78)90399-1.
- [26] T. Yokoyama, „Parametric instability of Timoshenko beams resting on an elastic foundation”, *Comput. Struct.*, t. 28, nr 2, s. 207–216, sty. 1988, doi: 10.1016/0045-7949(88)90041-7.
- [27] B. P. Shastri i G. Venkateswara Rao, „Dynamic stability of a cantilever column with an intermediate concentrated periodic load”, *J. Sound Vib.*, t. 113, nr 1, s. 194–197, luty 1987, doi: 10.1016/S0022-460X(87)81353-6.
- [28] B. P. Shastri i G. Venkateswara Rao, „Stability boundaries of a cantilever column subjected to an intermediate periodic concentrated axial load”, *J. Sound Vib.*, t. 116, nr 1, s. 195–198, lip. 1987, doi: 10.1016/S0022-460X(87)81333-0.
- [29] O. A. Bauchau i C. H. Hong, „Nonlinear response and stability analysis of beams using finite elements in time”, *AIAA J.*, t. 26, nr 9, s. 1135–1142, wrz. 1988, doi: 10.2514/3.10021.

- [30] L. Briseghella, C. E. Majorana, i C. Pellegrino, „Dynamic stability of elastic structures: a finite element approach”, *Comput. Struct.*, t. 69, nr 1, s. 11–25, paź. 1998, doi: 10.1016/S0045-7949(98)00084-4.
- [31] I. Svensson, „DYNAMIC INSTABILITY REGIONS IN A DAMPED SYSTEM”, *J. Sound Vib.*, t. 244, nr 5, s. 779–793, lip. 2001, doi: 10.1006/jsvi.2000.3537.
- [32] E. Mettler, „Allgemeine Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper”, *Ing.-Arch.*, t. 17, nr 6, s. 418–449, 1949, doi: 10.1007/BF00537887.
- [33] L.-W. Chen i D.-M. Ku, „Dynamic Stability of a Cantilever Shaft-Disk System”, *J. Vib. Acoust.*, t. 114, nr 3, s. 326–329, lip. 1992, doi: 10.1115/1.2930265.
- [34] V. N. Parekh i R. L. Carlson, „Effects of a localized region of damage on the parametric excitation of a bar”, *Int. J. Mech. Sci.*, t. 19, nr 9, s. 547–553, sty. 1977, doi: 10.1016/0020-7403(77)90047-9.
- [35] P. K. Datta i C. S. Nagraj, „Dynamic instability behaviour of tapered bars with flaws supported on an elastic foundation”, *J. Sound Vib.*, t. 131, nr 2, s. 229–237, cze. 1989, doi: 10.1016/0022-460X(89)90488-4.
- [36] R. Dufour i A. Berlioz, „Parametric Instability of a Beam Due to Axial Excitations and to Boundary Conditions”, *J. Vib. Acoust.*, t. 120, nr 2, s. 461–467, kwi. 1998, doi: 10.1115/1.2893852.
- [37] B. Akesson, *Understanding Bridges Collapses*. London: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2008.
- [38] D. Imhof, *Risk assessment of existing bridge structure (Ph.D. Dissertation)*. University of Cambridge, 2004.
- [39] *Tacoma Narrows Bridge collapse*, (1940). [Online Video]. Dostępne na: <http://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs>

- [40] L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maxime minimive proprietate gaudentes*. Lausanæ et Genevæ: M. M. Bousquet et Soc. In (Euler, OO, Series I, 24), 1744.
- [41] J.-L. Lagrange, „Sur la figure des colonnes”, *Misc. Taur.*, t. 5, s. 123–166, 1770.
- [42] J.-L. Lagrange, *Sur la figure des colonnes*. France: In Oeuvres de Lagrange V. 2; Serret, M.J.A., Ed.; Gauthier-Villars: Paris, 1868.
- [43] E. Kacapor, T. M. Atanackovic, i C. Dolicanin, „Optimal Shape and First Integrals for Inverted Compressed Column”, *Mathematics*, t. 8, nr 3, s. 334, mar. 2020, doi: 10.3390/math8030334.
- [44] N. Olhoff i A. P. Seyranian, „Bifurcation and post-buckling analysis of bimodal optimum columns”, *Int. J. Solids Struct.*, t. 45, nr 14–15, s. 3967–3995, lip. 2008, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2008.02.003.
- [45] T. M. Atanackovic i A. P. Seyranian, „Application of Pontryagin’s principle to bimodal optimization problems”, *Struct. Multidiscip. Optim.*, t. 37, nr 1, s. 1–12, grudz. 2008, doi: 10.1007/s00158-007-0211-6.
- [46] T. M. Atanackovic, „Optimal Shape of Column with Own Weight: Bi and Single Modal Optimization”, *Meccanica*, t. 41, nr 2, s. 173–196, kwi. 2006, doi: 10.1007/s11012-005-2168-0.
- [47] T. M. Atanackovic, „Optimal shape of a strongest inverted column”, *J. Comput. Appl. Math.*, t. 203, nr 1, s. 209–218, cze. 2007, doi: 10.1016/j.cam.2006.03.019.
- [48] A. P. Seyranian i O. G. Privalova, „The Lagrange problem on an optimal column: old and new results”, *Struct. Multidiscip. Optim.*, t. 25, nr 5–6, s. 393–410, grudz. 2003, doi: 10.1007/s00158-003-0333-4.
- [49] M. Beck, „Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes”, *ZAMP Z. Für Angew. Math. Phys.*, t. 3, nr 3, s. 225–228, maj 1952, doi: 10.1007/BF02008828.

- [50] Y. M. Ghugal i R. P. Shimpi, „A Review of Refined Shear Deformation Theories for Isotropic and Anisotropic Laminated Beams”, *J. Reinf. Plast. Compos.*, t. 20, nr 3, s. 255–272, luty 2001, doi: 10.1177/073168401772678283.
- [51] S. P. Timoshenko, *History of strength of materials*. New York: McGraw-Hill, 1953.
- [52] S. P. Timoshenko i J. M. Gere, *Theory of elastic stability*. New York: McGraw-Hill, 1961.
- [53] S. P. Timoshenko, „LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars”, *Lond. Edinb. Dublin Philos. Mag. J. Sci.*, t. 41, nr 245, s. 744–746, maj 1921, doi: 10.1080/14786442108636264.
- [54] I. Elishakoff, „Who developed the so-called Timoshenko beam theory?”, *Math. Mech. Solids*, t. 25, nr 1, s. 97–116, sty. 2020, doi: 10.1177/1081286519856931.
- [55] W. B. Bickford, „A consistent higher order beam theory”, *Int Proceeding Dev Theor. Appl. Mech. SECTAM*, t. 11, s. 137–150, 1982.
- [56] J. N. Reddy, „A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates”, *J. Appl. Mech.*, t. 51, nr 4, s. 745–752, grudz. 1984, doi: 10.1115/1.3167719.
- [57] J. N. Reddy, *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*. New York: John Wiley, 1984.
- [58] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*, 0 wyd. CRC Press, 2003. doi: 10.1201/b12409.
- [59] J. N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*, 0 wyd. CRC Press, 2006. doi: 10.1201/9780849384165.
- [60] I. Elishakoff, Y. Li, i J. H. Starnes, Jr, *Non-Classical Problems in the Theory of Elastic Stability*, 1. wyd. Cambridge University Press, 2001. doi: 10.1017/CBO9780511529658.

[61] O. N. Kirillov, *Nonconservative Stability Problems of Modern Physics*: DE GRUYTER, 2013. doi: 10.1515/9783110270433.

[62] Yuwaraj M. Ghugal i A. G. Dahake, „Flexure Of Cantilever Thick Beams Using Trigonometric Shear Deformation Theory”, sty. 2014, doi: 10.5281/ZENODO.1336484.

[63] W. Szemplińska-Stupnicka, *Zastosowanie parametrycznych równań różniczkowych w mechanice i technice*. Warszawa: Pr. IPPT PAN, 1, Warszawska Drukarnia Naukowa, 1975.

[64] W. Sochacki, „The dynamic stability of a simply supported stepped beams with additional discrete elements”, *Vib. Phys. Syst.*, t. XXV, s. 367–372, 2012.

[65] W. Sochacki, „The dynamic stability of a stepped cantilever beam with attachments”, *J. Vibroengineering*, t. 15, nr 1, s. 280–290, 2013.

[66] W. Sochacki, „Modelling and analysis of damped vibration in hydraulic cylinder”, *Math. Comput. Model. Dyn. Syst.*, t. 21, nr 1, s. 23–37, sty. 2015, doi: 10.1080/13873954.2013.871564.

[67] W. Sochacki, P. Rosikoń, i S. Topczewska, „Constructional damping mounting influence on T type frame vibrations”, *J. Vibroengineering*, t. 15, nr 4, s. 1892–1898, 2013.

[68] W. Sochacki i M. Bold, „Vibration of crane radius change system with internal damping”, *J. Appl. Math. Comput. Mech.*, t. 12, nr 2, s. 97–103, cze. 2013, doi: 10.17512/jamcm.2013.2.12.

[69] M. Bold, S. Garus, i W. Sochacki, „Damped vibrations of telescopic crane boom”, zaprezentowano na Engineering Mechanics 2018, Engineering Mechanics 2018, maj 2018, s. 101–104. doi: 10.21495/91-8-101.

[70] M. Bold i W. Sochacki, „Damped Vibrations of the Γ Type Frame with Open Cracks”, *J. Vibroengineering*, t. 20, nr 1, s. 215–224, 2018.

- [71] M. Bold i W. Sochacki, „Influence of Complex Damping on Transverse and Longitudinal Vibrations of Portal Frame”, *J. Vibroengineering*, t. 21, nr 1, s. 1–10, 2019.
- [72] M. Bold i W. Sochacki, „Coupled Vibration of Cracked Frame with Damping”, *Acta Phys. Pol. A*, t. 138, nr 2, s. 236–239, sie. 2020, doi: 10.12693/APhysPolA.138.236.
- [73] G. Ahmadi i P. G. Glockner, „Dynamic Stability of a Kelvin-Viscoelastic Column”, *J. Eng. Mech.*, t. 109, nr 4, s. 990–999, sie. 1983, doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1983)109:4(990).
- [74] G. Cederbaum i M. Mond, „Stability Properties of a Viscoelastic Column Under a Periodic Force”, *J. Appl. Mech.*, t. 59, nr 1, s. 16–19, mar. 1992, doi: 10.1115/1.2899424.
- [75] C. E. Majorana i C. Pellegrino, „Dynamic stability of elastically constrained beams: an exact approach”, *Eng. Comput.*, t. 14, nr 7, s. 792–805, lis. 1997, doi: 10.1108/02644409710188709.
- [76] M. Gürgöze, „Parametric vibrations of a restrained beam with an end mass under displacement excitation”, *J. Sound Vib.*, t. 108, nr 1, s. 73–84, lip. 1986, doi: 10.1016/S0022-460X(86)80312-1.
- [77] K. Sato, H. Saito, i K. Otomi, „The Parametric Response of a Horizontal Beam Carrying a Concentrated Mass Under Gravity”, *J. Appl. Mech.*, t. 45, nr 3, s. 643–648, wrz. 1978, doi: 10.1115/1.3424375.
- [78] H. A. Evensen i R. M. Evan-Iwanowski, „Effects of Longitudinal Inertia Upon the Parametric Response of Elastic Columns”, *J. Appl. Mech.*, t. 33, nr 1, s. 141–148, mar. 1966, doi: 10.1115/1.3624971.
- [79] W. Sochacki, „Wpływ dodatkowych elementów dyskretnych na stateczność dynamiczną belki swobodnie podpartej”, w *Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Mechanika*, t. 65, w 222, vol. 65. , Rzeszów, 2005, s. 351–356.

- [80] W. Sochacki, „The dynamic stability of a simply supported beam with additional discrete elements”, *J. Sound Vib.*, t. 314, nr 1–2, s. 180–193, lip. 2008, doi: 10.1016/j.jsv.2007.12.037.
- [81] M. Krawczuk i W. M. Ostachowicz, „Parametric vibrations of beam with crack”, *Arch. Appl. Mech.*, t. 62, nr 7, s. 463–473, 1992, doi: 10.1007/BF00810237.
- [82] M.-K. Yeh i Y.-T. Kuo, „Dynamic instability of composite beams under parametric excitation”, *Compos. Sci. Technol.*, t. 64, nr 12, s. 1885–1893, wrz. 2004, doi: 10.1016/j.compscitech.2004.02.001.
- [83] M. Gürgöze, „On the dynamic stability of a pre-twisted beam subject to a pulsating axial load”, *J. Sound Vib.*, t. 102, nr 3, s. 415–422, paź. 1985, doi: 10.1016/S0022-460X(85)80151-6.
- [84] C.-C. Chen i M.-K. Yeh, „Parametric instability of a beam under electromagnetic excitation”, *J. Sound Vib.*, t. 240, nr 4, s. 747–764, mar. 2001, doi: 10.1006/jsvi.2000.3255.
- [85] C.-C. Chen i M.-K. Yeh, „Parametric instability of a column with an axially oscillating mass”, *J. Sound Vib.*, t. 224, nr 4, s. 643–664, lip. 1999, doi: 10.1006/jsvi.1999.2210.
- [86] C.-C. Chen i M.-K. Yeh, „Parametric instability of a cantilevered column under periodic loads in the direction of the tangency coefficient”, *J. Sound Vib.*, t. 183, nr 2, s. 253–267, cze. 1995, doi: 10.1006/jsvi.1995.0253.
- [87] M.-K. Yeh i C.-C. Chen, „Dynamic instability of a general column under a periodic load in the direction of the tangency coefficient at any axial position”, *J. Sound Vib.*, t. 217, nr 4, s. 665–689, lis. 1998, doi: 10.1006/jsvi.1998.1721.
- [88] W. Sochacki i L. Tomski, „Parametric vibrations of column subjected to a follower force towards the fixed point”, *Vib. Phys. Syst.*, t. 20, s. 268–269, 2002.

- [89] L. Tomski i W. Sochacki, „Stateczność dynamiczna kolumn dwiergencyjnych - pseudoflatterowych”, *Zesz. Nauk. Politech. Rzesz.*, t. 174, nr 52, s. 111–118, 1999.
- [90] S. H. Hyun i H. H. Yoo, „Dynamic modelling and stability analysis of axially oscillating cantilever beams”, *J. Sound Vib.*, t. 228, nr 3, s. 543–558, grudz. 1999, doi: 10.1006/jsvi.1999.2427.
- [91] B. Kang i C. A. Tan, „Parametric instability of Leipholtz column under periodic excitation”, *J. Sound Vib.*, t. 229, nr 5, s. 1097–1113, luty 2000, doi: 10.1006/jsvi.1999.2597.
- [92] A. Foryś i A. Gajewski, „Parametryczna optymalizacja pręta lepkosprężystego ze względu na stateczność dynamiczną”, *Rozpr. Inż.*, t. 35, nr 2, s. 297–308, 1987.
- [93] J. Giergiel, *Drgania mechaniczne układów dyskretnych*. Rzeszów: Oficyna wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, 2004.
- [94] L. T. Wrotny, *Dynamika układów mechanicznych*. Warszawa: Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 1995.
- [95] A. Buchacz, J. Świder, i J. Wojnarowski, *Podstawy teorii drgań układów mechanicznych z symulacją komputerową: układy dyskretne o jednym stopniu swobody*. Gliwice: Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, 2011.
- [96] J.-W. Liang i B. F. Feeny, „Identifying Coulomb and Viscous Friction in Forced Dual-Damped Oscillators”, *J. Vib. Acoust.*, t. 126, nr 1, s. 118–125, sty. 2004, doi: 10.1115/1.1640356.
- [97] B. Żółtowski, *Badania dynamiki maszyn*. Bydgoszcz: Wydawnictwo Makar – B.Ż., 2002.
- [98] Z. Osiński, *Tłumienie drgań mechanicznych*. Warszawa: PWN, 1979.

- [99] J. Giergiel, *Tłumienie drgań mechanicznych, Skrypty uczelniane nr 920*. Kraków: AGH, 1984.
- [100] B. Żółtowski i S. Niziński, *Modelowanie procesów eksploatacji maszyn*. Bydgoszcz: Wydawnictwo Makar – B.Ż., 2002.
- [101] S. D. Ponomariew, *Współczesne metody obliczeń wytrzymałościowych w budowie maszyn. Obciążenia dynamiczne*. Warszawa: PWN, 1957.
- [102] T. T. Soong i B. F. Spencer, „Supplemental energy dissipation: State-of-the-art and state-of-the-practice”, *Eng. Struct.*, t. 24, nr 3, s. 243–259, 2002, doi: [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(01\)00092-X](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(01)00092-X).
- [103] Z. Osiński, *Teoria drgań*. Warszawa: PWN, 1980.
- [104] Z. Osiński i J. Wróbel, *Teoria konstrukcji*. Warszawa: PWN, 1995.
- [105] B. Skalmierski, *Mechanika. Mechanika analityczna i teoria drgań*. Częstochowa: Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, 2001.
- [106] D. Halliday i in., *Podstawy fizyki. 2 2*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2014.
- [107] K. Jamroziak, „Wpływ tarcia suchego na dyssypację energii uderzenia”, *Wybrane Probl. Inż.*, t. 2, s. 139–144, 2011.
- [108] K. Jamroziak, M. Bocian, i M. Kulisiewicz, „Przykłady zastosowań nieklasycznych modeli sprężysto-tłumiących w procesie uderzenia balistycznego”, *Model. Inż.*, t. 40, s. 95–102, 2010.
- [109] M. Kulisiewicz, *Modeling and identification of nonlinear mechanical systems under dynamic complex loads*. Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2005.

- [110] M. Gürgöze i H. Erol, „Dynamic response of a viscously damped cantilever with a viscous end condition”, *J. Sound Vib.*, t. 298, nr 1–2, s. 132–153, lis. 2006, doi: 10.1016/j.jsv.2006.04.042.
- [111] S. Krenk, „Complex modes and frequencies in damped structural vibrations”, *J. Sound Vib.*, t. 270, nr 4–5, s. 981–996, mar. 2004, doi: 10.1016/S0022-460X(03)00768-5.
- [112] G. Oliveto, A. Santini, i E. Tripodi, „COMPLEX MODAL ANALYSIS OF A FLEXURAL VIBRATING BEAM WITH VISCOUS END CONDITIONS”, *J. Sound Vib.*, t. 200, nr 3, s. 327–345, luty 1997, doi: 10.1006/jsvi.1996.0717.
- [113] W. Sochacki i M. Bold, „Wpływ tłumienia konstrukcyjnego mocowań na drgania układu zmiany wysięgu żurawia”, *Model. Inż.*, t. 47, nr 16, s. 172–178, 2013.
- [114] W. Sochacki i M. Bold, „Effect of structural damping on vibration of a truck-mounted telescopic crane”, zaprezentowano na PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONFERENCE ON NUMERICAL ANALYSIS AND APPLIED MATHEMATICS 2014 (ICNAAM-2014), Rhodes, Greece, 2015, s. 850058. doi: 10.1063/1.4913113.
- [115] W. Sochacki i M. Bold, „Influence of internal and constructional damping on vibrations of telescopic boom of truck crane”, *Mach. Dyn. Res.*, t. 38, nr 4, s. 51–58, 2014.
- [116] M. A. De Rosa, M. Lippiello, M. J. Maurizi, i H. D. Martin, „Free vibration of elastically restrained cantilever tapered beams with concentrated viscous damping and mass”, *Mech. Res. Commun.*, t. 37, nr 2, s. 261–264, mar. 2010, doi: 10.1016/j.mechrescom.2009.11.006.
- [117] V. Jovanovic, „A Fourier series solution for the transverse vibration response of a beam with a viscous boundary”, *J. Sound Vib.*, t. 330, nr 7, s. 1504–1515, mar. 2011, doi: 10.1016/j.jsv.2010.10.007.

- [118] M. Gürgöze, „ON THE SENSITIVITIES OF THE EIGENVALUES OF A VISCOUSLY DAMPED CANTILEVER CARRYING A TIP MASS”, *J. Sound Vib.*, t. 216, nr 2, s. 215–225, wrz. 1998, doi: 10.1006/jsvi.1998.1586.
- [119] M. Gürgöze, A. N. Doğruoğlu, i S. Zeren, „On the eigencharacteristics of a cantilevered visco-elastic beam carrying a tip mass and its representation by a spring-damper-mass system”, *J. Sound Vib.*, t. 301, nr 1–2, s. 420–426, mar. 2007, doi: 10.1016/j.jsv.2006.10.002.
- [120] J. Przybylski, *Drgania i stateczność dwuczłonowych układów prętowych wstępnie sprzężonych przy obciążeniach niezachowawczych, Seria Monografie, nr 92*. Częstochowa: Politechnika Częstochowska, 2002.
- [121] T.-C. Tsai, J.-H. Tsau, i C.-S. Chen, „Vibration analysis of a beam with partially distributed internal viscous damping”, *Int. J. Mech. Sci.*, t. 51, nr 11–12, s. 907–914, lis. 2009, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2009.09.039.
- [122] G. Oliveto, A. Santini, i E. Tripodi, „Complex modal analysis of a flexural vibrating beam with viscous end conditions”, *J. Sound Vib.*, t. 200, nr 3, s. 327–345, luty 1997, doi: 10.1006/jsvi.1996.0717.
- [123] W. Sochacki i M. Bold, „Wpływ tłumienia konstrukcyjnego mocowań na drgania układu zmiany wysięgu żurawia”, *Model. Inż.*, t. 47, nr 16, s. 172–178, 2013.
- [124] W. Sochacki i M. Bold, „Damped vibration of the system of changing the crane boom radius”, *J. Appl. Math. Comput. Mech.*, t. 14, nr 2, s. 111–122, cze. 2015, doi: 10.17512/jamcm.2015.2.12.
- [125] W. Sochacki i M. Bold, „Influence of internal and constructional damping on vibrations of telescopic boom of truck crane”, *Mach. Dyn. Res.*, t. 38, nr 4, s. 51–58, 2014.
- [126] S. Woroszył, *Przykłady i zadania z teorii drgań. Układy ciągłe*. Warszawa: PWN, 1984.

- [127] S. P. C. Marques i G. J. Creus, *Computational Viscoelasticity*. w SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012. doi: 10.1007/978-3-642-25311-9.
- [128] W.-R. Chen, „Bending vibration of axially loaded Timoshenko beams with locally distributed Kelvin–Voigt damping”, *J. Sound Vib.*, t. 330, nr 13, s. 3040–3056, cze. 2011, doi: 10.1016/j.jsv.2011.01.015.
- [129] M. Dolny i P. Cybulski, *Optymalne rozmieszczanie tłumików lepkosprężystych na ramie płaskiej*. Poznań: Politechnika Poznańska, 2011.
- [130] K. Marynowski i T. Kapitaniak, „Zener internal damping in modelling of axially moving viscoelastic beam with time-dependent tension”, *Int. J. Non-Linear Mech.*, t. 42, nr 1, s. 118–131, sty. 2007, doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2006.09.006.
- [131] M. Gürgöze, A. N. Doğruoğlu, i S. Zeren, „On the eigencharacteristics of a cantilevered visco-elastic beam carrying a tip mass and its representation by a spring-damper-mass system”, *J. Sound Vib.*, t. 301, nr 1–2, s. 420–426, mar. 2007, doi: 10.1016/j.jsv.2006.10.002.
- [132] O. N. Kirillov i A. O. Seyranian, „The effect of small internal and external damping on the stability of distributed non-conservative systems”, *J. Appl. Math. Mech.*, t. 69, nr 4, s. 529–552, sty. 2005, doi: 10.1016/j.jappmathmech.2005.07.004.
- [133] S.-U. Ryu i Y. Sugiyama, „Computational dynamics approach to the effect of damping on stability of a cantilevered column subjected to a follower force”, *Comput. Struct.*, t. 81, nr 4, s. 265–271, mar. 2003, doi: 10.1016/S0045-7949(02)00436-4.
- [134] M. Gürgöze, „On the sensitivities of the eigenvalues of a viscously damped cantilever carrying a tip mass”, *J. Sound Vib.*, t. 216, nr 2, s. 215–225, wrz. 1998, doi: 10.1006/jsvi.1998.1586.
- [135] M. I. Friswell i A. W. Lees, „The modes of non-homogeneous damped beams”, *J. Sound Vib.*, t. 242, nr 2, s. 355–361, kwi. 2001, doi: 10.1006/jsvi.2000.3323.

- [136] M. Gürgöze i H. Erol, „On the eigencharacteristics of multi-step beams carrying a tip mass subjected to non-homogeneous external viscous damping”, *J. Sound Vib.*, t. 272, nr 3–5, s. 1113–1124, maj 2004, doi: 10.1016/j.jsv.2003.08.016.
- [137] M. Gürgöze i H. Erol, „On the eigencharacteristics of multi-step beams carrying a tip mass subjected to non-homogeneous external viscous damping”, *J. Sound Vib.*, t. 272, nr 3–5, s. 1113–1124, maj 2004, doi: 10.1016/j.jsv.2003.08.016.
- [138] M. I. Friswell i A. W. Lees, „The modes of non-homogeneous damped beams”, *J. Sound Vib.*, t. 242, nr 2, s. 355–361, kwi. 2001, doi: 10.1006/jsvi.2000.3323.
- [139] M. Gürgöze i H. Erol, „On the eigencharacteristics of multi-step rods carrying a tip mass subjected to non-homogeneous external viscous damping”, *J. Sound Vib.*, t. 267, nr 2, s. 355–365, paź. 2003, doi: 10.1016/S0022-460X(03)00154-8.
- [140] O. N. Kirillov i A. O. Seyranian, „The effect of small internal and external damping on the stability of distributed non-conservative systems”, *J. Appl. Math. Mech.*, t. 69, nr 4, s. 529–552, sty. 2005, doi: 10.1016/j.jappmathmech.2005.07.004.
- [141] D. Cekus, *Modelowanie, identyfikacja modeli i badania dynamiki układów mechanicznych*. Częstochowa: Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, seria monografie nr 275, 2013.
- [142] D. C. D. Oguamanam, J. S. Hansen, i G. R. Heppler, „DYNAMICS OF A THREE-DIMENSIONAL OVERHEAD CRANE SYSTEM”, *J. Sound Vib.*, t. 242, nr 3, s. 411–426, maj 2001, doi: 10.1006/jsvi.2000.3375.
- [143] B. Posiadała, *Modelowanie i analiza zjawisk dynamicznych maszyn roboczych i ich elementów jako dyskretno-ciągłych układów mechanicznych*. Częstochowa: Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, seria monografie nr 61, 1999.
- [144] R. E. Roberson i R. Schwertassek, *Dynamics of Multibody Systems*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1988. doi: 10.1007/978-3-642-86464-3.

- [145] G. Sun, M. Kleeberger, i J. Liu, „Complete dynamic calculation of lattice mobile crane during hoisting motion”, *Mech. Mach. Theory*, t. 40, nr 4, s. 447–466, kwi. 2005, doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2004.07.014.
- [146] Z. Zieliński, *Dźwignice i urządzenia transportowe*. Warszawa: WSiP, 1984.
- [147] J. Awrejcewicz, V. A. Krysko, i A. F. Vakakis, *Nonlinear Dynamics of Continuous Elastic Systems*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [148] R. W. Clough i J. Penzien, *Dynamics of structures*, Second edition. New Dehli Bengaluru Chennai: CBS Publishers & Distributors, 2015.
- [149] Z. Dzygadlo, S. Kaliski, I. Solarz, i E. Włodarczyk, *Drgania i fale*. Warszawa: PWN, 1966.
- [150] R. Gutowski i W. A. Świetlicki, *Dynamika i drgania układów mechanicznych*. Warszawa, 1986.
- [151] L. Meirovitch, *Methods of analytical dynamics*. Mineola, N.Y: Dover, 2003.
- [152] Z. Osiński i J. Wróbel, *Teoria konstrukcji*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1995.
- [153] B. Skalmierski, *Mechanics*. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company, 1991.
- [154] S. P. Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*. Dover Publications, 2012.
- [155] Z. Osiński, *Teoria drgań*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1978.
- [156] D. Cekus, „The identification of the elastic support system of the laboratory truck crane”, *Mach. Dyn. Res.*, t. 38, nr 2, s. 5–15, 2014.

- [157] D. Cekus, *Dynamika żurawia samojezdnego z uwzględnieniem odkształcalności poprzecznej wysięgnika teleskopowego oraz wzdluznej siłownika teleskopowego a także siłowników podporowych*. Częstochowa: Praca doktorska, 2005.
- [158] D. Cekus i B. Posiadala, „VIBRATION MODEL AND ANALYSIS OF THREE-MEMBER TELESCOPIC BOOM WITH HYDRAULIC CYLINDER FOR ITS RADIUS CHANGE”, *Int. J. Bifurc. Chaos*, t. 21, nr 10, s. 2883–2892, paź. 2011, doi: 10.1142/S0218127411030404.
- [159] D. Cekus i B. Posiadala, „Free longitudinal vibrations of hydraulic cylinder”, *Vib. Phys. Syst.*, t. 20, s. 124–125, 2002.
- [160] S. Chwastek i S. Michałowski, „Suppression of crane vibrations with controlled boom support system”, *Arch. Mech. Eng.*, t. XLVIII, s. 19–27, 2001.
- [161] B. Jerman, P. Podržaj, i J. Kramar, „An investigation of slewing-crane dynamics during slewing motion—development and verification of a mathematical model”, *Int. J. Mech. Sci.*, t. 46, nr 5, s. 729–750, maj 2004, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2004.05.006.
- [162] S. Kiliçslan, T. Balkan, i S. K. Ider, „TIPPING LOADS OF MOBILE CRANES WITH FLEXIBLE BOOMS”, *J. Sound Vib.*, t. 223, nr 4, s. 645–657, cze. 1999, doi: 10.1006/jsvi.1999.2154.
- [163] B. Posiadala i D. Cekus, „Discrete model of vibration of truck crane telescopic boom with consideration of the hydraulic cylinder of crane radius change in the rotary plane”, *Autom. Constr.*, t. 17, nr 3, s. 245–250, mar. 2008, doi: 10.1016/j.autcon.2007.05.004.
- [164] M. Savković, M. Gašić, G. Pavlović, R. Bulatović, i N. Zdravković, „Stress analysis in contact zone between the segments of telescopic booms of hydraulic truck cranes”, *Thin-Walled Struct.*, t. 85, s. 332–340, grudz. 2014, doi: 10.1016/j.tws.2014.09.009.

- [165] B. Spruogis, A. Jakštas, V. Turla, I. Iljin, i N. Šešok, „DYNAMIC REACTION FORCES OF AN OVERHEAD CRANE ON LIFTING”, *TRANSPORT*, t. 26, nr 3, s. 279–283, paź. 2011, doi: 10.3846/16484142.2011.622144.
- [166] D. Cekus i B. Posiadała, „Model dyskretny drgań układu dwuczłonowy wysięgnik teleskopowy – siłownik zmiany wysięgu (uogólnione kryteria)”, *Czas. Tech.*, t. 1–M, s. 71–79, 2005.
- [167] W. Sochacki i L. Tomski, „Drgania swobodne układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego”, *Probl. Masz. Roboczych*, t. 12, s. 91–100, 1998.
- [168] W. Sochacki i L. Tomski, „Free and parametric vibration of the system: telescopic boom-hydraulic cylinder (changing the crane radius)”, *Arch. Mech. Eng.*, t. 46, s. 257–271, 1999.
- [169] S. Uzny, „Free vibrations and stability of hydraulic cylinder fixed elastically on both ends: Free vibrations and stability of hydraulic cylinder fixed elastically on both ends”, *PAMM*, t. 9, nr 1, s. 303–304, grudz. 2009, doi: 10.1002/pamm.200910125.
- [170] W. Sochacki i L. Tomski, „Free vibration and dynamic stability of hydraulic cylinder set”, *Mach. Dyn. Probl.*, t. 23, nr 4, s. 91–104, 1999.
- [171] W. Sochacki, „Drgania siłownika hydraulicznego z uwzględnieniem tłumienia wewnętrznego”, *Model. Inż.*, t. 41, s. 371–376, 2011.
- [172] W. Sochacki, „Wpływ tłumienia zewnętrznego na drgania siłownika hydraulicznego”, *Hydraul. Pneumatyka*, t. 6, s. 38–42, 2011.
- [173] W. Sochacki, „Wpływ tłumienia konstrukcyjnego mocowań na drgania siłownika hydraulicznego”, *Przegląd Mech.*, t. 9, s. 38–42, 2012.
- [174] W. Sochacki, „Modelling and analysis of damped vibration in hydraulic cylinder”, *Math. Comput. Model. Dyn. Syst.*, t. 21, nr 1, s. 23–37, sty. 2015, doi: 10.1080/13873954.2013.871564.

[175] G. Oliveto, A. Santini, i E. Tripodi, „Complex modal analysis of a flexural vibrating beam with viscous end conditions”, *J. Sound Vib.*, t. 200, nr 3, s. 327–345, luty 1997, doi: 10.1006/jsvi.1996.0717.

[176] M. Levinson, „Application of the Galerkin and Ritz methods to nonconservative problems of elastic stability”, *ZAMP*, t. 17, 1966.

[177] H. A. Evensen i R. M. Evan-Iwanowski, „Effects of Longitudinal Inertia Upon the Parametric Response of Elastic Columns”, *J. Appl. Mech.*, t. 33, nr 1, s. 141–148, mar. 1966, doi: 10.1115/1.3624971.

[178] I. Kovacic, R. Rand, i S. Mohamed Sah, „Mathieu’s Equation and Its Generalizations: Overview of Stability Charts and Their Features”, *Appl. Mech. Rev.*, t. 70, nr 2, s. 020802, mar. 2018, doi: 10.1115/1.4039144.

[179] R. H. Rand, *Lecture Notes on Nonlinear Vibrations (Version 53)*. NY: Cornell University, Ithaca, 2017. Dostęp: 23 czerwiec 2022. [Online]. Dostępne na: <http://dspace.library.cornell.edu/handle/1813/28989>

[180] J. D. Cole, *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. Waltham: Blaisdel, 1968.

[181] A. Nayfeh, *Perturbation Methods*. New York: Wiley, 1973.

[182] M. Burzyńska-Szysko, *Materiały konstrukcyjne*. Warszawa: Politechnika Warszawska, 2011.

[183] H. Bachmann, Red., *Vibration problems in structures: practical guidelines*. Basel, Switz. ; Boston, Mass: Birkäuser Verlag, 1995.

[184] M. I. Friswell i A. W. Lees, „THE MODES OF NON-HOMOGENEOUS DAMPED BEAMS”, *J. Sound Vib.*, t. 242, nr 2, s. 355–361, kwi. 2001, doi: 10.1006/jsvi.2000.3323.

- [185] O. N. Kirillov i A. P. Seyranian, „EFFECT OF SMALL INTERNAL AND EXTERNAL DAMPING ON THE STABILITY OF CONTINUOUS NON-CONSERVATIVE SYSTEMS”, *J. Appl. Math. Mech.*, t. 69, s. 529–552, 2005.
- [186] J. W. Liang i B. F. Feeny, „Identifying Coulomb and Viscous Friction from Free-Vibration Decrements”, *Nonlinear Dyn.*, t. 16, nr 4, s. 337–347, 1998, doi: 10.1023/A:1008213814102.
- [187] W. Sochacki i M. Bold, „Damped vibration of a non-prismatic beam with a rotational spring”, *Vib. Phys. Syst.*, t. 26, s. 251–256, 2014.
- [188] W. Sochacki i M. Bold, „Modelling and analysis of damping in slides of truck-mounted crane boom”, *Mach. Dyn. Res.*, t. 38, nr 2, s. 133–139, 2014.
- [189] A. S. Veletsos i C. E. Ventura, „Modal analysis of non-classically damped linear systems”, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, t. 14, nr 2, s. 217–243, mar. 1986, doi: 10.1002/eqe.4290140205.
- [190] L. Chen, L. Sun, i S. Nagarajaiah, „Cable vibration control with both lateral and rotational dampers attached at an intermediate location”, *J. Sound Vib.*, t. 377, s. 38–57, wrz. 2016, doi: 10.1016/j.jsv.2016.04.028.
- [191] „Żuraw samochodowy FABLOK DST0285”. Dostęp: 4 wrzesień 2024. [Online]. Dostępne na: <https://www.netbid.com/pl/aukcje/przegląd-szczegóły/16035897-15967657-BUMAR-FABLOK-DST0285-%C5%BBuraw-samochodowy/>
- [192] „Rozłożony żuraw samochodowy FABLOK DST0285”. Dostęp: 4 wrzesień 2024. [Online]. Dostępne na: <https://letheko.pl/index.php/historia/historia-nauki-i-techniki/maszyny/162-historia-produkcji-zurawi-samojezdnych-w-polsce>
- [193] „Karta katalogowa DST-0285”. Fabryka Maszyn Budowlanych i Lokomotyw „Bumar-Fablok” w Chrzanowie.

[194] W. Sochacki, *Drgania swobodne i parametryczne układu: wysięgnik teleskopowy - siłownik zmiany wysięgu*. Częstochowa: Praca doktorska, Politechnika Częstochowska, 1996.

[195] *Żuraw samojezdny DUT-0203 Instrukcja obsługi*. Głogów: Fabryka maszyn budowlanych „BUMAR-FAMABA”, 1989.

[196] „Polska Norma, PN-90/B-03200”.

[197] *Praca badawcza pod kierunkiem L. Tomskiego, BP-01-1/91, Model teoretyczny i obliczeniowy teleskopowego żurawia samochodowego*. Częstochowa: Politechnika Częstochowska, Instytut Mechaniki i PKM, 1991.

Spis rysunków

Rys. 3.1. Prosta belka Bernoulliego-Eulera obciążona siłą osiową ściskającą zmieniającą się cyklicznie z uwzględnieniem tłumienia.

Rys. 3.2. Wpływ tłumienia na zwiększenie obszarów rozwiązań statecznych równania Mathieu (Karta Strutta) dla $c = 0,1$ (szary), $c = 0,3$ (czerwony), $c = 0,6$ (żółty) oraz $c = 0,9$ (niebieski).

Rys. 3.3. Karta Strutta – kolorem białym zaznaczono rozwiązania stabilne, a szarym niestabilne rozwiązania równania Mathieu.

Rys. 3.4. Wpływ tłumienia wiskotycznego c na obszar niestateczny (zaczieniony) rozwiązania równania Mathieu.

Rys. 3.5. Relacje między współczynnikami a i b dla analizowanych materiałów naniesione na kartę Strutta.

Rys. 3.6. Relacja między parametrami δ i ϵ naniesiona na kartę Strutta; brak tłumienia (przypadek 1 w tabeli 3.3).

Rys. 3.7. Relacja między parametrami δ i ϵ naniesiona na kartę Strutta; uwzględnione tłumienie w podporach belki dla $M = 0,05$ (przypadek 2 w tabeli 3.3).

Rys. 3.8. Relacja między parametrami δ i ϵ naniesiona na kartę Strutta; uwzględnione tłumienie ośrodka dla $N = 18,5$ (przypadek 3 w tabeli 3.3).

Rys. 3.9. Relacja między parametrami δ i ϵ naniesiona na kartę Strutta; uwzględnione tłumienie wewnętrzne dla $H = 0,001$ (przypadek 4 w tabeli 3.3).

Rys. 3.10. Relacja między parametrami δ i ϵ naniesiona na kartę Strutta; uwzględnione tłumienie ośrodka dla $N = 4,26$ oraz tłumienie w podporach belki dla $M = 0,017$ (przypadek 5 w tabeli 3.3).

Rys. 4.1. Żuraw samochodowy FABLOK DST0285 [191].

Rys. 4.2. Rozłożony żuraw samochodowy FABLOK DST0285 [192].

Rys. 4.3. Tablica udźwigów i wysięgu żurawia FABLOK DST0285 [193].

Rys. 4.4. Wymiary znamionowe żurawia samochodowego FABLOK DST0285 [193].

Rys. 4.5. Schemat fizyczny układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego DST0285.

Rys. 4.6. Wpływ wysokości słupa cieczy na kąt uniesienia wysięgnika.

Rys. 4.7. Wpływ długości wysunięcia siłownika teleskopowania na długość całkowitą wysięgnika.

Rys. 4.8. Przykładowe położenia członów wysuwnych w stosunku do członu podstawowego trójczłonowego wysięgnika teleskopowego.

Rys. 4.9. Układ zredukowany.

Rys. 4.10. Masa zastępcza układu zredukowanego.

Rys. 4.11. Współczynnik sztywności k w funkcji wysokości słupa cieczy H dla analizowanego układu.

Rys. 4.12. Wpływ kąta nachylenia wysięgnika oraz jego długości całkowitej na pierwszą częstość własną dla obciążenia $m = 10^4 \text{ kg}$.

Rys. 4.13. Wpływ kąta nachylenia wysięgnika oraz jego długości całkowitej na drugą częstość własną dla obciążenia $m = 10^4 \text{ kg}$.

Rys. 4.14. Wpływ kąta nachylenia wysięgnika oraz jego długości całkowitej na pierwszą częstość własną dla obciążenia $m = 10^3 \text{ kg}$.

Rys. 4.15. Wpływ kąta nachylenia wysięgnika oraz jego długości całkowitej na drugą częstość własną dla obciążenia $m = 10^3 \text{ kg}$.

Rys. 4.16. Wpływ długości całkowitej wysięgnika na pierwszą częstość drgań dla wybranych wartości kąta nachylenia wysięgnika.

Rys. 4.17. Wpływ długości całkowitej na drugą częstość własną dla wybranych wartości kątów nachylenia wysięgnika.

Rys. 4.18. Wpływ masy ładunku obciążającego układ na pierwszą częstość własną.

Rys. 4.19. Wpływ masy ładunku obciążającego układ na drugą częstość własną.

Rys. 4.20. Wpływ tłumienia zewnętrznego na część rzeczywistą pierwszej wartości własnej.

Rys. 4.21. Wpływ tłumienia zewnętrznego na część urojoną pierwszej wartości własnej.

Rys. 4.22. Wpływ tłumienia wewnętrznego na część rzeczywistą pierwszej wartości własnej.

Rys. 4.23. Wpływ tłumienia wewnętrznego na część urojoną pierwszej wartości własnej.

Rys. 4.24. Wpływ tłumienia konstrukcyjnego na część rzeczywistą pierwszej wartości własnej.

Rys. 4.25. Wpływ tłumienia konstrukcyjnego na część urojoną pierwszej wartości własnej.

Rys. 4.26. Wpływ kąta nachylenia wysięgnika na wartość parametru δ z zaznaczonym zakresem kątów dla rozwiązań niestatecznych.

Rys. 4.27. Wpływ kąta nachylenia wysięgnika na wartość parametru ϵ z zaznaczonym zakresem kątów dla rozwiązań niestatecznych.

Rys. 4.28. Wpływ kąta nachylenia wysięgnika na wartość pierwszej częstości własnej z zaznaczonym zakresem kątów dla rozwiązań niestatecznych.

Rys. 4.29. Wpływ masy ładunku na wartość parametru δ z zaznaczonym zakresem masy ładunku dla rozwiązań niestatecznych.

Rys. 4.30. Wpływ masy ładunku na wartość parametru ϵ z zaznaczonym zakresem masy ładunku dla rozwiązań niestatecznych.

Rys. 4.31. Wpływ masy ładunku na wartość pierwszej częstości własnej z zaznaczonym zakresem masy ładunku dla rozwiązań niestatecznych.

Rys. 4.32. Wpływ długości liny na wartość parametru δ z zaznaczonym zakresem długości liny dla rozwiązań niestatecznych.

Rys. 4.33. Wpływ długości liny na wartość parametru ϵ z zaznaczonym zakresem długości liny dla rozwiązań niestatecznych.

Rys. 4.34. Wpływ długości liny na wartość pierwszej częstości własnej z zaznaczonym zakresem długości liny dla rozwiązań niestatecznych.

Rys. 4.35. Wpływ tłumienia zewnętrznego na wartość parametru ϵ oraz na wartość minimum obszaru niestatecznego $\epsilon_{\min}$.

Rys. 4.36. Wpływ tłumienia zewnętrznego na wartość parametru ϵ .

Rys. 4.37. Wpływ tłumienia wewnętrznego na a), b) wartość parametru ϵ oraz na a), c) wartość minimum obszaru niestatecznego $\epsilon_{\min}$.

Rys. 4.38. Wpływ tłumienia konstrukcyjnego na wartość parametru ϵ .

Rys. 4.39. Wpływ tłumienia wewnętrznego, zewnętrznego i konstrukcyjnego na wartość parametru ϵ oraz na wartość minimum obszaru niestatecznego $\epsilon_{\min}$.

Rys. 4.40. Wpływ tłumienia wewnętrznego, zewnętrznego i konstrukcyjnego na zakres rozwiązań statecznych analizowanego układu.

Spis tabel

Tabela 3.1 Własności materiałów wykorzystanych do analizy stateczności dynamicznej belek Bernoulliego-Eulera [182].

Tabela 3.2 Wyznaczone częstotliwości drgań belek.

Tabela 3.3 Wyznaczone wartości własne belek wykonanych ze stali konstrukcyjnej dla wybranych przypadków tłumienia.

Tabela 4.1 Geometryczne i fizyczne parametry modelu [124], [194].

Tabela 4.2 Stateczność dynamiczna wybranych konfiguracji geometrycznych nietłumionego układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego.

Dodatki

D1. Elementy macierzy współczynników

Niezerowe elementy macierzy $[A](\omega)$ dla układu przedstawionego na rys. 4.5 przyjmują postać

$$a_{1,1} = 1 \quad (\text{D1.1})$$

$$a_{1,3} = 1 \quad (\text{D1.2})$$

$$a_{2,1} = \cosh(\alpha_1 l_1) \quad (\text{D1.3})$$

$$a_{2,2} = \sinh(\alpha_1 l_1) \quad (\text{D1.4})$$

$$a_{2,3} = \cos(\beta_1 l_1) \quad (\text{D1.5})$$

$$a_{2,4} = \sin(\beta_1 l_1) \quad (\text{D1.6})$$

$$a_{2,5} = -1 \quad (\text{D1.7})$$

$$a_{2,7} = -1 \quad (\text{D1.8})$$

$$a_{3,1} = \alpha_1 \sinh(\alpha_1 l_1) \quad (\text{D1.9})$$

$$a_{3,2} = \alpha_1 \cosh(\alpha_1 l_1) \quad (\text{D1.10})$$

$$a_{3,3} = -\beta_1 \sin(\beta_1 l_1) \quad (\text{D1.11})$$

$$a_{3,4} = \beta_1 \cos(\beta_1 l_1) \quad (\text{D1.12})$$

$$a_{3,6} = -\alpha_2 \quad (\text{D1.13})$$

$$a_{3,8} = -\beta_2 \quad (\text{D1.14})$$

$$a_{4,5} = 1 \quad (\text{D1.15})$$

$$a_{4,7} = 1 \quad (\text{D1.16})$$

$$a_{4,9} = -1 \quad (\text{D1.17})$$

$$a_{4,11} = -1 \quad (\text{D1.18})$$

$$a_{5,5} = \cosh(\alpha_2 l_2) \quad (\text{D1.19})$$

$$a_{5,6} = \sinh(\alpha_2 l_2) \quad (\text{D1.20})$$

$$a_{5,7} = \cos(\beta_2 l_2) \quad (\text{D1.21})$$

$$a_{5,8} = \sin(\beta_2 l_2) \quad (\text{D1.22})$$

$$a_{5,9} = -\cosh(\alpha_3 l_3) \quad (\text{D1.23})$$

$$a_{5,10} = -\sinh(\alpha_3 l_3) \quad (\text{D1.24})$$

$$a_{5,11} = -\cos(\beta_3 l_3) \quad (\text{D1.25})$$

$$a_{5,12} = -\sin(\beta_3 l_3) \quad (\text{D1.26})$$

$$a_{6,9} = \cosh(\alpha_3 l_3) \quad (\text{D1.27})$$

$$a_{6,10} = \sinh(\alpha_3 l_3) \quad (\text{D1.28})$$

$$a_{6,11} = \cos(\beta_3 l_3) \quad (\text{D1.29})$$

$$a_{6,12} = \sin(\beta_3 l_3) \quad (\text{D1.30})$$

$$a_{6,13} = -1 \quad (\text{D1.31})$$

$$a_{6,15} = -1 \quad (\text{D1.32})$$

$$a_{7,9} = \alpha_3 \sinh(\alpha_3 l_3) \quad (\text{D1.33})$$

$$a_{7,10} = \alpha_3 \cosh(\alpha_3 l_3) \quad (\text{D1.34})$$

$$a_{7,11} = -\beta_3 \sin(\beta_3 l_3) \quad (\text{D1.35})$$

$$a_{7,12} = \beta_3 \cos(\beta_3 l_3) \quad (\text{D1.36})$$

$$a_{7,14} = -\alpha_4 \quad (\text{D1.37})$$

$$a_{7,16} = -\beta_4 \quad (\text{D1.38})$$

$$a_{8,17} = 1 \quad (\text{D1.39})$$

$$a_{8,19} = 1 \quad (\text{D1.40})$$

$$a_{9,17} = \cosh(\alpha_5 l_5) \quad (\text{D1.41})$$

$$a_{9,18} = \sinh(\alpha_5 l_5) \quad (\text{D1.42})$$

$$a_{9,19} = \cos(\beta_5 l_5) \quad (\text{D1.43})$$

$$a_{9,20} = \sin(\beta_5 l_5) \quad (\text{D1.44})$$

$$a_{9,21} = -1 \quad (\text{D1.45})$$

$$a_{9,23} = -1 \quad (\text{D1.46})$$

$$a_{10,17} = \alpha_5 \sinh(\alpha_5 l_5) \quad (\text{D1.47})$$

$$a_{10,18} = \alpha_5 \cosh(\alpha_5 l_5) \quad (\text{D1.48})$$

$$a_{10,19} = -\beta_5 \sin(\beta_5 l_5) \quad (\text{D1.49})$$

$$a_{10,20} = \beta_5 \cos(\beta_5 l_5) \quad (\text{D1.50})$$

$$a_{10,22} = -\alpha_6 \quad (\text{D1.51})$$

$$a_{10,24} = -\beta_6 \quad (\text{D1.52})$$

$$a_{11,13} = \cosh(\alpha_4 l_4) \quad (\text{D1.53})$$

$$a_{11,14} = \sinh(\alpha_4 l_4) \quad (\text{D1.54})$$

$$a_{11,15} = \cos(\beta_4 l_4) \quad (\text{D1.55})$$

$$a_{11,16} = \sin(\beta_4 l_4) \quad (\text{D1.56})$$

$$a_{11,21} = -\cos \gamma \quad (\text{D1.57})$$

$$a_{11,23} = -\cos \gamma \quad (\text{D1.58})$$

$$a_{12,1} = \alpha_1^2 J_1(E_1 + j \omega E_1^*) \quad (\text{D1.59})$$

$$a_{12,2} = -j \omega \alpha_1 C_{R2} \quad (\text{D1.60})$$

$$a_{12,3} = -\beta_1^2 J_1(E_1 + j \omega E_1^*) \quad (\text{D1.61})$$

$$a_{12,4} = -j \omega \beta_1 C_{R2} \quad (D1.62)$$

$$a_{13,5} = \alpha_2^2 J_2(E_2 + j \omega E_2^*) \cosh(\alpha_2 l_2) \quad (D1.63)$$

$$a_{13,6} = \alpha_2^2 J_2(E_2 + j \omega E_2^*) \sinh(\alpha_2 l_2) \quad (D1.64)$$

$$a_{13,7} = -\beta_2^2 J_2(E_2 + j \omega E_2^*) \cos(\beta_2 l_2) \quad (D1.65)$$

$$a_{13,8} = -\beta_2^2 J_2(E_2 + j \omega E_2^*) \sin(\beta_2 l_2) \quad (D1.66)$$

$$a_{14,1} = \alpha_1^2 J_1(E_1 + j \omega E_1^*) \cosh(\alpha_1 l_1) \quad (D1.67)$$

$$a_{14,2} = \alpha_1^2 J_1(E_1 + j \omega E_1^*) \sinh(\alpha_1 l_1) \quad (D1.68)$$

$$a_{14,3} = -\beta_1^2 J_1(E_1 + j \omega E_1^*) \cos(\beta_1 l_1) \quad (D1.69)$$

$$a_{14,4} = -\beta_1^2 J_1(E_1 + j \omega E_1^*) \sin(\beta_1 l_1) \quad (D1.70)$$

$$a_{14,5} = -\alpha_2^2 J_2(E_2 + j \omega E_2^*) \quad (D1.71)$$

$$a_{14,7} = \beta_2^2 J_2(E_2 + j \omega E_2^*) \quad (D1.72)$$

$$a_{15,9} = \alpha_3^2 J_3(E_3 + j \omega E_3^*) \quad (D1.73)$$

$$a_{15,11} = -\beta_3^2 J_3(E_3 + j \omega E_3^*) \quad (D1.74)$$

$$a_{16,9} = \alpha_3^2 J_3(E_3 + j \omega E_3^*) \cosh(\alpha_3 l_3) \quad (D1.75)$$

$$a_{16,10} = \alpha_3^2 J_3(E_3 + j \omega E_3^*) \sinh(\alpha_3 l_3) \quad (D1.76)$$

$$a_{16,11} = -\beta_3^2 J_3(E_3 + j \omega E_3^*) \cos(\beta_3 l_3) \quad (D1.77)$$

$$a_{16,12} = -\beta_3^2 J_3(E_3 + j \omega E_3^*) \sin(\beta_3 l_3) \quad (D1.78)$$

$$a_{16,13} = -\alpha_4^2 J_4(E_4 + j \omega E_4^*) \quad (D1.79)$$

$$a_{16,15} = \beta_4^2 J_4(E_4 + j \omega E_4^*) \quad (D1.80)$$

$$a_{17,13} = \alpha_4^2 J_4(E_4 + j \omega E_4^*) \cosh(\alpha_4 l_4) \quad (D1.81)$$

$$a_{17,14} = \alpha_4^2 J_4(E_4 + j \omega E_4^*) \sinh(\alpha_4 l_4) \quad (D1.82)$$

$$a_{17,15} = -\beta_4^2 J_4(E_4 + j \omega E_4^*) \cos(\beta_4 l_4) \quad (D1.83)$$

$$a_{17,16} = -\beta_4^2 J_4(E_4 + j \omega E_4^*) \sin(\beta_4 l_4) \quad (D1.84)$$

$$a_{18,17} = \alpha_5^2 J_5(E_5 + j \omega E_5^*) \cosh(\alpha_5 l_5) - j \omega \alpha_5 C_{R1} \sinh(\alpha_5 l_5) \quad (D1.85)$$

$$a_{18,18} = \alpha_5^2 J_5(E_5 + j \omega E_5^*) \sinh(\alpha_5 l_5) - j \omega \alpha_5 C_{R1} \cosh(\alpha_5 l_5) \quad (D1.86)$$

$$a_{18,19} = -\beta_5^2 J_5(E_5 + j \omega E_5^*) \cos(\beta_5 l_5) + j \omega \beta_5 C_{R1} \sin(\beta_5 l_5) \quad (D1.87)$$

$$a_{18,20} = -\beta_5^2 J_5(E_5 + j \omega E_5^*) \sin(\beta_5 l_5) - j \omega \beta_5 C_{R1} \cos(\beta_5 l_5) \quad (D1.88)$$

$$a_{19,17} = \alpha_5^2 J_5(E_5 + j \omega E_5^*) \cosh(\alpha_5 l_5) \quad (D1.89)$$

$$a_{19,18} = \alpha_5^2 J_5(E_5 + j \omega E_5^*) \sinh(\alpha_5 l_5) \quad (D1.90)$$

$$a_{19,19} = -\beta_5^2 J_5(E_5 + j \omega E_5^*) \cos(\beta_5 l_5) \quad (D1.91)$$

$$a_{19,20} = -\beta_5^2 J_5(E_5 + j \omega E_5^*) \sin(\beta_5 l_5) \quad (D1.92)$$

$$a_{19,21} = -\alpha_6^2 J_6(E_6 + j \omega E_6^*) \quad (D1.93)$$

$$a_{19,23} = \beta_6^2 J_6(E_6 + j \omega E_6^*) \quad (D1.94)$$

$$a_{20,21} = \alpha_6^2 J_6(E_6 + j \omega E_6^*) \cosh(\alpha_6 l_6) \quad (D1.95)$$

$$a_{20,22} = \alpha_6^2 J_6(E_6 + j \omega E_6^*) \sinh(\alpha_6 l_6) \quad (D1.96)$$

$$a_{20,23} = -\beta_6^2 J_6(E_6 + j \omega E_6^*) \cos(\beta_6 l_6) \quad (D1.97)$$

$$a_{20,24} = -\beta_6^2 J_6(E_6 + j \omega E_6^*) \sin(\beta_6 l_6) \quad (D1.98)$$

$$a_{21,1} = \alpha_1^3 J_1(E_1 + j \omega E_1^*) \sinh(\alpha_1 l_1) + \alpha_1 P_1 \sinh(\alpha_1 l_1) \quad (D1.99)$$

$$a_{21,2} = \alpha_1^3 J_1(E_1 + j \omega E_1^*) \cosh(\alpha_1 l_1) + \alpha_1 P_1 \cosh(\alpha_1 l_1) \quad (D1.100)$$

$$a_{21,3} = \beta_1^3 J_1(E_1 + j \omega E_1^*) \sin(\beta_1 l_1) - \beta_1 P_1 \sin(\beta_1 l_1) \quad (D1.101)$$

$$a_{21,4} = -\beta_1^3 J_1(E_1 + j \omega E_1^*) \cos(\beta_1 l_1) + \beta_1 P_1 \cos(\beta_1 l_1) \quad (D1.102)$$

$$a_{21,6} = -\alpha_2^3 J_2(E_2 + j \omega E_2^*) \quad (D1.103)$$

$$a_{21,8} = \beta_2^3 J_2(E_2 + j \omega E_2^*) \quad (D1.104)$$

$$a_{21,10} = -\alpha_3^3 J_3(E_3 + j \omega E_3^*) - \alpha_3 P_3 \quad (D1.105)$$

$$a_{21,12} = \beta_3^3 J_3(E_3 + j \omega E_3^*) - \beta_3 P_3 \quad (D1.106)$$

$$a_{22,5} = \alpha_2^3 J_2(E_2 + j \omega E_2^*) \sinh(\alpha_2 l_2) \quad (D1.107)$$

$$a_{22,6} = \alpha_2^3 J_2(E_2 + j \omega E_2^*) \cosh(\alpha_2 l_2) \quad (D1.108)$$

$$a_{22,7} = \beta_2^3 J_2(E_2 + j \omega E_2^*) \sin(\beta_2 l_2) \quad (D1.109)$$

$$a_{22,8} = -\beta_2^3 J_2(E_2 + j \omega E_2^*) \cos(\beta_2 l_2) \quad (D1.110)$$

$$a_{22,9} = \alpha_3^3 J_3(E_3 + j \omega E_3^*) \sinh(\alpha_3 l_3) \quad (D1.111)$$

$$a_{22,10} = \alpha_3^3 J_3(E_3 + j \omega E_3^*) \cosh(\alpha_3 l_3) \quad (D1.112)$$

$$a_{22,11} = \beta_3^3 J_3(E_3 + j \omega E_3^*) \sin(\beta_3 l_3) \quad (D1.113)$$

$$a_{22,12} = -\beta_3^3 J_3(E_3 + j \omega E_3^*) \cos(\beta_3 l_3) \quad (D1.114)$$

$$a_{22,14} = -\alpha_4^3 J_4(E_4 + j \omega E_4^*) \quad (D1.115)$$

$$a_{22,16} = \beta_4^3 J_4(E_4 + j \omega E_4^*) \quad (D1.116)$$

$$a_{23,21} = -k_Z \cos^2 \varphi \cosh(\alpha_6 l_6) + \alpha_6^3 J_6(E_6 + j \omega E_6^*) \sinh(\alpha_6 l_6) + \alpha_6 P_6 \sinh(\alpha_6 l_6) \quad (D1.117)$$

$$a_{23,22} = -k_Z \cos^2 \varphi \sinh(\alpha_6 l_6) + \alpha_6^3 J_6(E_6 + j \omega E_6^*) \cosh(\alpha_6 l_6) + \alpha_6 P_6 \cosh(\alpha_6 l_6) \quad (D1.118)$$

$$a_{23,23} = -k_Z \cos^2 \varphi \cos(\beta_6 l_6) + \beta_6^3 J_6(E_6 + j \omega E_6^*) \sin(\beta_6 l_6) - \beta_6 P_6 \sin(\beta_6 l_6) \quad (D1.119)$$

$$a_{23,24} = -k_Z \cos^2 \varphi \sin(\beta_6 l_6) - \beta_6^3 J_6(E_6 + j \omega E_6^*) \cos(\beta_6 l_6) + \beta_6 P_6 \cos(\beta_6 l_6) \quad (D1.120)$$

$$a_{23,25} = k_Z \cos^2 \varphi \quad (D1.121)$$

$$a_{24,13} = \alpha_4^3 J_4(E_4 + j \omega E_4^*) \cos \gamma \sinh(\alpha_4 l_4) + \alpha_4 P_4 \cos \gamma \sinh(\alpha_4 l_4) \quad (D1.122)$$

$$a_{24,14} = \alpha_4^3 J_4(E_4 + j \omega E_4^*) \cos \gamma \cosh(\alpha_4 l_4) + \alpha_4 P_4 \cos \gamma \cosh(\alpha_4 l_4) \quad (D1.123)$$

$$a_{24,15} = \beta_4^3 J_4(E_4 + j \omega E_4^*) \cos \gamma \sin(\beta_4 l_4) - \beta_4 P_4 \cos \gamma \sin(\beta_4 l_4) \quad (D1.124)$$

$$a_{24,16} = -\beta_4^3 J_4(E_4 + j \omega E_4^*) \cos \gamma \cos(\beta_4 l_4) + \beta_4 P_4 \cos \gamma \cos(\beta_4 l_4) \quad (D1.125)$$

$$a_{24,17} = \alpha_5^3 J_5(E_5 + j \omega E_5^*) \sinh(\alpha_5 l_5) \quad (D1.126)$$

$$a_{24,18} = \alpha_5^3 J_5(E_5 + j \omega E_5^*) \cosh(\alpha_5 l_5) \quad (D1.127)$$

$$a_{24,19} = \beta_5^3 J_5(E_5 + j \omega E_5^*) \sin(\beta_5 l_5) \quad (D1.128)$$

$$a_{24,20} = -\beta_5^3 J_5(E_5 + j \omega E_5^*) \cos(\beta_5 l_5) \quad (D1.129)$$

$$a_{24,21} = M_Z \omega^2 - k_1 (\sin \gamma)^2 \quad (D1.130)$$

$$a_{24,22} = -\alpha_6^3 J_6(E_6 + j \omega E_6^*) \quad (D1.131)$$

$$a_{24,23} = M_Z \omega^2 - k_1 (\sin \gamma)^2 \quad (D1.132)$$

$$a_{24,24} = \beta_6^3 J_6(E_6 + j \omega E_6^*) \quad (D1.133)$$

$$a_{25,21} = -k_Z \cos \varphi \cosh(\alpha_6 l_6) \quad (D1.134)$$

$$a_{25,22} = -k_Z \cos \varphi \sinh(\alpha_6 l_6) \quad (D1.135)$$

$$a_{25,23} = -k_Z \cos \varphi \cos(\beta_6 l_6) \quad (D1.136)$$

$$a_{25,24} = -k_Z \cos \varphi \sin(\beta_6 l_6) \quad (\text{D1.137})$$

$$a_{25,25} = -m \omega^2 + k_Z \cos \varphi \quad (\text{D1.138})$$